
Électricité : électronique et électrocinétique

Centre de Préparation à l'Agrégation de Montrouge

Baptiste Corrège – baptiste.correge@phys.ens.fr



Version du 24 avril 2024.

Hiérarchisation des exercices : Vous retrouverez dans la marge devant certains exercices, voire certaines questions, différents symboles pour vous aider à organiser vos révisions :

- ♥ indique une question dont le raisonnement, le calcul ou le résultat est à connaître par cœur. Vous ne pouvez pas passer à côté !
- Q indique une question, un exercice inhabituel auquel il est bon de se confronter au moins une fois.
- ⚡ indique un exercice ou une question difficile/secondaire qui peut être réservée à une seconde lecture.

Une lecture indispensable : les programmes de l'agrégation et des leçons de physique, disponibles sur le wiki du site de la préparation à l'agrégation (<http://ressources.agreg.phys.ens.fr/ressources/>). Ensuite, beaucoup de livres sont disponibles à la bibliothèque de Montrouge. Je vous encourage à passer du temps à les consulter tout au long de l'année.

Si vous avez la moindre question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail ou à venir me voir directement dans mon bureau à l'ENS (24 rue Lhomond, 75005 Paris, Bureau LS159/S11).

Remerciements : Ce cours est inspiré du cours d'électricité de mes prédécesseurs à la préparation à l'agrégation de chimie, Alexis Brès et Lionel Djadaojee, ainsi que du cours d'électronique pour la préparation à l'agrégation de physique par Jérémy Neveu.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [Creative Commons "Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International"](#).



Il n'y a pas de réussite facile ni d'échec définitif.

Marcel Proust

Table des matières

I	Introduction	3
1 -	Un bref historique	3
2 -	Motivations du cours	4
3 -	Quelques ressources	4
II	Grandeurs électriques	5
1 -	Terminologie des circuits	5
2 -	Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)	5
3 -	Charge, courant, intensité	6
4 -	Potentiel et tension	7
5 -	Masse et terre	8
6 -	Régime continu, régime variable	8
7 -	Système triphasé	10
8 -	Convention récepteur - générateur	10
9 -	Puissance électrique	10
III	Dipôles usuels	13
1 -	Résistance	13
2 -	Sources de tension et de courant	19
3 -	Bobine	20
4 -	Condensateur	21
IV	Régime transitoire des circuits linéaires du premier ordre	23
1 -	Circuit RC série	23
2 -	Circuit RL série	28
V	Régime transitoire des circuit linéaires du second ordre	30
1 -	Analogie électro-mécanique	30
2 -	Réponse indicielle du RLC série	31
3 -	Temps de réponse	33
4 -	Aspects énergétiques	34

VI	Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé	36
1 -	Notation complexe	36
2 -	Impédance d'un dipôle en RSF	37
3 -	Notion de résonance	41
4 -	Puissance en RSF	46
VII	Composants non-linéaires	49
1 -	Diodes	49
2 -	Amplificateur linéaire intégré (ALI)	52
VIII	Filtrage analogique	56
1 -	Analyse de Fourier et représentation spectrale d'un signal	56
2 -	Notion de filtre	57
3 -	Diagramme de Bode	58
IX	Transmission et traitement du signal	66
1 -	Modulation d'un signal	66
2 -	Modulation d'amplitude	67
3 -	Traitement numérique	68

I Introduction

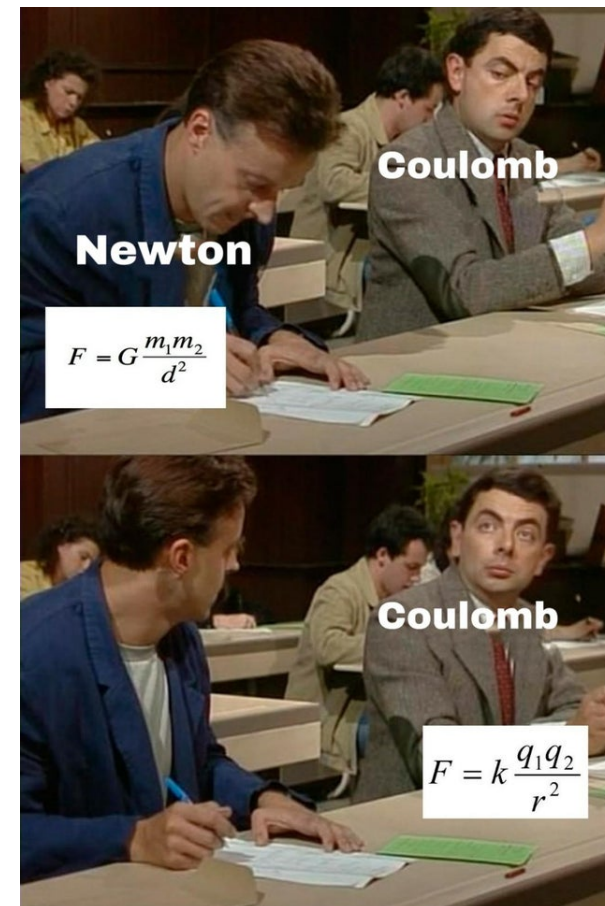
L'électricité est la branche de la physique qui a pour objet d'étude l'ensemble des phénomènes électriques, *i.e.* les phénomènes dus à l'existence de particules chargées dans la matière, et leurs applications. L'électricité englobe l'électrostatique (étude des particules chargées au repos), l'électrocinétique (étude des charges en mouvement) et l'électronique (étude des variations des grandeurs électriques pour capter, transmettre, exploiter l'information). Ce cours portera sur ces deux derniers domaines, et vous étudierez l'électrostatique dans le cadre de votre cours d'électromagnétisme (ainsi que les phénomènes d'induction et leurs applications).

1 - Un bref historique

Jusqu'au XIX^e siècle, l'étude de l'électricité se réduit à celle des phénomènes électrostatiques : on sait qu'il existe deux types de charges (positives et négatives), auxquelles est associée une force dont **Charles-Augustin Coulomb** (1736-1806) met en évidence la loi : « *les forces électriques s'exercent en raison inverse du carré de la distance* ». En 1781, le biologiste italien **Luigi Galvani** observe pour la première fois la contraction de pattes de grenouilles lorsqu'elles sont touchées simultanément par deux métaux différents. Après ces observations, **Alexandre Volta**, physicien et chimiste italien, construit en 1800 la première pile, constituée d'un empilement de disques de zinc et de cuivre séparés par un tissu imbibé de saumure. En reliant les deux extrémités de la pile par un fil métallique il produit des courants électriques continus et stables. Albert Einstein dira d'ailleurs plus tard de cette invention qu'elle est « *la base fondamentale de toutes les inventions* ». Et c'est en effet à partir de la création de la pile que l'étude des phénomènes électriques va beaucoup progresser. Dans les décennies qui suivirent, **Georg Ohm** découvre l'existence d'une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel appliquée aux bornes d'un conducteur et le courant électrique qui le traverse, et le physicien anglais **James Prescott Joule** (connu surtout pour ses travaux en thermodynamique), énonce une relation entre le courant électrique traversant un conducteur et la chaleur dissipée par celui-ci. En 1820, le physicien danois **Hans Oersted** observe (de manière assez fortuite lors d'une démonstration expérimentale en classe) la déviation de l'aiguille d'une boussole sous l'influence d'un courant électrique. **François Arago** et

André-Marie Ampère approfondissent l'existence d'un lien entre électricité et magnétisme, et Ampère construit le premier électroaimant au début du XIX^e siècle. Entre 1831 et 1839, **Michaël Faraday** fait de nombreuses découvertes fondatrices, en particulier celle de l'induction électromagnétique dont les applications servent de base à toute l'industrie électrotechnique.

Le XIX^e siècle voit apparaître le moteur électrique, les premiers réseaux d'électricité, le téléphone, la dynamo, la lampe à incandescence, les premiers appareils électroménagers.... un développement qui se poursuit jusqu'à aujourd'hui avec l'électronique, qui connaît un essor avec la découverte des semi-conducteurs au XX^e siècle.



2 - Motivations du cours

On peut identifier trois grands thèmes liés à l'étude de l'électricité. D'abord, l'**énergie électrique**, qui peut être aisément convertie en d'autres formes d'énergie (thermique, lumineuse, mécanique...). Elle est de plus facile à transporter (ce qui permet d'éloigner les nuisances liées à la production de la zone d'utilisation). L'électricité est aussi à la base de nombreux **capteurs** mis en oeuvre pour la **mesure** des grandeurs physiques et chimiques. Enfin, l'étude de l'électricité nous conduit naturellement à l'étude des **signaux électriques**, très présents dans la vie quotidienne, et à la **transmission de l'information**.

D'un point de vue plus pratique et pédagogique, il s'agit d'une discipline faciles d'accès (moyens techniques simples et peu coûteux) où les grandeurs physiques sont facilement mesurables. En revanche, l'enjeu auprès des étudiants est de donner du sens à ces grandeurs. C'est aussi une discipline didactique, qui permet d'étudier de manière quantitative de nombreux concepts physiques (oscillation, régime transitoire, résonance, filtrage,...). Aussi, les analogies entre grandeurs électriques et grandeurs mécanique ou thermodynamique, peuvent s'avérer très fructueuses.

D'un point de vue fondamental, l'étude des circuits est une application directe de l'électromagnétisme (c'est en quelque sorte de l'électromagnétisme « *en kit* »). Il est conseillé de relire ce cours après celui d'électromagnétisme, en reliant les concepts appliqués de l'électricité à ces lois fondamentales.

3 - Quelques ressources

Pour aller plus en détail dans l'histoire de l'électricité, celle-ci est très bien décrite sur le [site d'EDF](#). On y retrouvera par exemple des liens vers des animations qui peuvent être insérées dans des leçons.

Le [site RTE](#) référence des données sur le réseau de transport d'électricité français. On y retrouve notamment une description du système de distribution d'électricité et les données en temps réel du réseau électrique national.

Enfin, la plus grande source d'informations à votre disposition reste la bibliothèque de Montrouge. Dès que vous en avez la possibilité, il faut se plonger dans les livres et constituer votre propre corpus de connaissances.

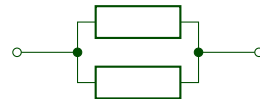
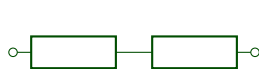
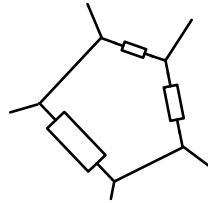
II Grandeurs électriques

L'électrocinétique est l'étude du mouvement de particules chargées dans la matière (circuits) sous l'action d'un champ électrique.

1 - Terminologie des circuits

Quelques définitions des éléments constitutifs d'un circuit électrique :

- **Dipôle** : composant électrique relié au circuit par deux bornes.
- **Nœud** : point commun d'au moins trois dipôles.
- **Branche** : portion de circuits qui relie deux nœuds consécutifs.
- Des dipôles sont **en série** s'ils appartiennent à la même branche.
- Des dipôles sont **en parallèle** (ou **en dérivation**) s'ils sont reliés aux deux mêmes nœuds.



2 - Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

Plusieurs grandeurs électriques peuvent être définies en tout point du circuit (tension, intensité,...). Ces grandeurs évoluent dans le temps en raison de deux choses : l'influence des dipôles (actifs ou passifs) et les retards liés à leur propagation au sein du circuit. La vitesse de propagation dans les circuits est proche de la célérité de la lumière $c = 299\,792\,458$ m/s. Ainsi, pour un circuit de taille typique L , la perturbation d'une grandeur créée par un dipôle à un instant t se répercute à un instant $t + L/c$ à l'autre bout du circuit. Il paraît commode de s'affranchir de ces effets propagatifs, et de ne s'intéresser qu'à l'action des dipôles. L'ARQS consiste à négliger ce temps de propagation devant les temps caractéristiques de variation des grandeurs électriques. L'ARQS est parfois aussi appelée *approximation des régimes quasi-permanents* (ARQP).

Définition ♥

Si on considère des variations typiques à une fréquence f (période $T = 1/f$) se propageant dans un circuit de longueur caractéristique L , l'**approximation des régimes quasi-stationnaires** est réalisée si :

$$L \ll cT \quad \Longleftrightarrow \quad f \ll \frac{c}{L} \quad (\text{II.1})$$

Application

Dans quelle gamme de fréquence vérifie-t-on l'ARQS en TP ? Est-elle vérifiée à l'échelle du réseau électrique français ?

Typiquement, en TP, on a $L \sim 1$ m, donc $L/c \sim 3$ ns et $f \ll 300$ MHz.

A l'échelle du réseau électrique français, $f \sim 50$ Hz et $L \sim 1000$ km. Ainsi $c/L \sim 300$ Hz : l'ARQS n'est pas rigoureusement vérifiée, mais à l'échelle d'une ville oui.

3 - Charge, courant, intensité

La **charge électrique**, souvent notée q , est une grandeur positive ou négative associée aux particules chargées. Elle est ainsi **quantifiée**, *i.e.* multiple de la charge électrique élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}^*$. C'est également une grandeur **extensive** et **conservative** (pas de création ni de disparition de charge, *i.e.* q ne peut varier pour un système isolé).

Le **courant électrique** est le **phénomène physique** qui correspond au déplacement ordonné de porteurs de charges électrique dans un conducteur. Le sens conventionnel du courant est celui des charges positives (s'il y en a, sinon il s'agit de l'opposé du sens de déplacement des charges négatives).

L'**intensité** i du courant est une **grandeur** physique. C'est le débit de charges à travers une section du conducteur.

Définition ♥

Une charge dq traversant une surface S de conducteur en une durée dt crée un courant électrique dont l'intensité est :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Son unité est l'ampère (A), qui correspond à des C.s^{-1} . C'est une unité du Système International (SI), définie désormais (depuis 2019) à partir de la charge élémentaire e et de la seconde s tel que $1\text{A} = 1\text{C/s}$. L'intensité se mesure à l'aide d'un ampèremètre branché en série dans le circuit. Elle est représentée par une flèche sur un fil : si le sens conventionnel du courant est celui de la flèche alors $i > 0$, sinon $i < 0$. De plus, l'intensité en entrée d'un dipôle est égal à l'intensité en sortie de ce même dipôle.

*. Plus précisément : $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ **exactement** : en effet, e est une constante fondamentale dont la valeur est fixée (tout comme c , $\hbar$ et k_B) et qui, depuis la nouvelle définition des unités du système international (2019) permet de définir l'ampère (A).

Attention

Il ne faut pas confondre *courant électrique* et *intensité*.

La mesure de l'intensité du courant s'effectue avec un ampèremètre branché **en série**. La mesure indiquée correspond à une flèche de courant qui entre par la borne A et sort par la borne COM.



FIGURE 1 – Mesure d'une intensité

Ordres de grandeur

- Signaux nerveux : $20 \mu\text{A}$
- Electrocutation : 30 mA
- Chauffage 1000 W : 5 A
- Lignes HT : 1000 A
- En TP : $1 \text{ à } 10 \text{ mA}$
- Lampe 100 W : 0.5 A
- Lignes TGV : 500 A
- Foudre : $10 - 100 \text{ kA}$

En régime stationnaire ou dans l'ARQP, il n'y a ni accumulation ni disparition de charge ; il y a conservation de la charge. La charge contenue dans un volume quelconque d'un conducteur ne varie pas au cours du temps : dans ce volume, le débit des charges entrant réellement est donc égal au débit des charges sortant réellement.

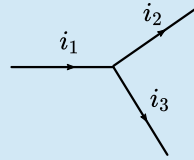
Loi des nœuds ♥

La somme des intensités des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui sortent du même nœud.

La loi des nœuds est la première loi de Kirchhoff de l'électrocinétique. Elle traduit la conservation de la charge dans un circuit électrique.

Application

On considère le nœud électrique figuré ci-dessous.



Quelle relation vérifient les intensités i_1 , i_2 et i_3 ?

Dans le cadre de l'ARQS, la charge est conservée, donc on peut écrire :
 $i_1 = i_2 + i_3$

4 - Potentiel et tension

Au sein d'un conducteur électrique, dès lors qu'il existe un champ électrique $\vec{E}$, les charges subissent une force $\vec{f} = q\vec{E}$ qui les met en mouvement et est à l'origine du courant électrique. Ce champ dérive d'un potentiel V dans le cadre de l'ARQS ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$). On définit entre deux points A et B la tension U_{AB} qui est égale à la différence de potentiel entre ces deux points :

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (\text{II.3})$$

Cela vient de la relation entre U_{AB} et $\vec{E}$:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La tension s'exprime en volts (V) *. La tension se mesure à l'aide d'un voltmètre placé en dérivation entre les bornes où on souhaite la mesurer (borne V au point A et borne COM au point B pour mesurer U_{AB}). On peut également se servir d'un oscilloscope analogique ou numérique, qui va permettre une visualisation graphique des variations de la tensions en fonction du temps ou d'une autre tension. **

*. Remarque : le volt n'est pas une unité fondamentale du système international, $1 \text{ V} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$.

. Mais comme l'indique leur nom : un multimètre sert à mesurer, et un oscilloscope sert à visualiser ! Ainsi, pour une mesure quantitative, **utilisez le multimètre.

Ordres de grandeur

- Tensions usuelles en TP : $1 - 10 \text{ V}$
- Lignes électriques HT : $\sim 100 \text{ kV}$
- Électrocution domestique : $\sim 100 \text{ V}$
- Champ disruptif *** (air sec) : 3600 kV/m
- Champ disruptif (air saturé en eau) : 1000 kV/m

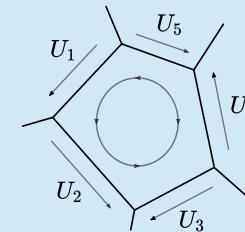
Loi des mailles ❤️

Dans une maille quelconque d'un réseau, dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, la somme algébrique des différences de potentiel le long de la maille est constamment nulle (à condition que les variations de flux magnétique à travers la maille soient négligeables)

La loi des mailles est la seconde loi de Kirchhoff de l'électrocinétique. Elle traduit la conservation de l'énergie dans un circuit électrique.

Application

On considère le réseau électrique figuré ci-dessous.



Quelle relation vérifient les tensions U_1 , U_2 , U_3 , U_4 et U_5 ?

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$$

***. L'air est un isolant fort. Mais sous de fortes tensions, les électrons des molécules composant l'air sont arrachés de leur bande de valence et participent à la conduction. L'air devient conducteur et la foudre traverse l'atmosphère.

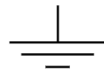
5 - Masse et terre

La **masse** est définie comme la « *partie conductrice d'un matériel électrique susceptible d'être touchée par une personne, qui n'est pas normalement sous tension mais peut le devenir en cas de défaut d'isolement des parties actives de ce matériel.* »^{*}. On la schématise ainsi :



Exemples : châssis métallique d'une voiture (relié à la borne « - » de la batterie), cadre d'un vélo (relié à une des bornes de la dynamo), carcasse d'un GBF ou d'un oscilloscope (reliée aux bornes extérieures des prises BNC) ...

La **terre** est définie comme la « *masse conductrice de la terre, dont le potentiel électrique en chaque point est considéré comme égal à zéro* ». C'est donc la terre que l'on choisit comme référence de potentiel. On la représente ainsi :



Il existe dans les prises d'installations domestiques une prise de terre (qui concrètement est relié à un piquet planté dans le sol au pied du bâtiment).

En pratique, la masse des appareils est reliée à la terre, afin d'éviter tout danger d'électrocution (nos pieds nous relient à la terre, si nous touchons la partie conductrice d'un appareil qui n'est pas à 0 V, il y a danger d'électrocution). Ce n'est en revanche pas le cas de tous les appareils (voitures, bateaux, avions) : gare aux décharges électriques.

On prendra garde au fait suivant : dans un circuit, les bornes de certains appareils (bornes extérieures des prises BNC des oscilloscope ou GBF par exemple) sont reliées à la terre, et fixent ainsi la masse du circuit. Il faut ainsi veiller à ce qu'un circuit ne comporte pas plus d'une masse, au risque de court-circuiter certains composants ! En pratique, cela peut être évité en utilisant un transformateur d'isolement ou des appareils à **masse flottante** (ex. oscilloscope différentiel).

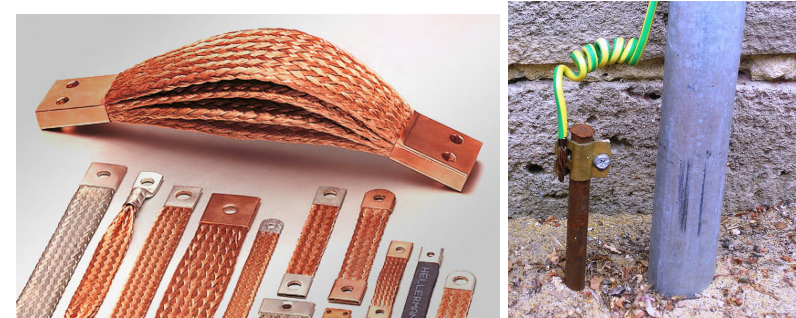
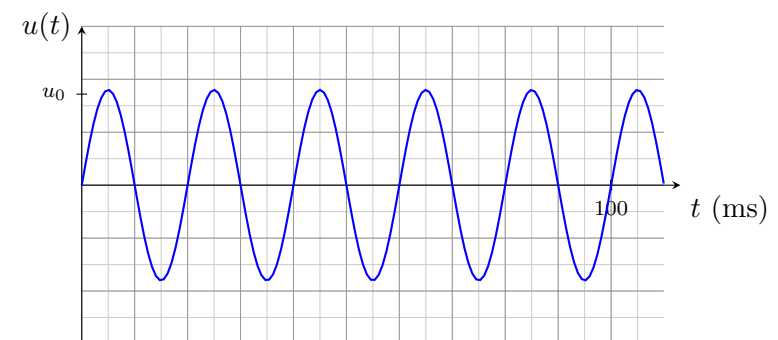


FIGURE 2 – *Gauche* : pour relier des carcasses et des circuits à la masse, la connexion doit être la plus courte possible, et avoir une surface de contact maximale, donc par sa forme en nappe, la tresse de masse est le conducteur le plus adapté à cette utilisation. *Droite* : piquet de terre en acier galvanisé (environ 60 cm de long) planté dans le sol au pied d'une maison (on remarque le fil normalisé rayé vert et jaune de mise à la terre).

6 - Régime continu, régime variable

On est en *régime continu* lorsque toutes les grandeurs électriques (tension, intensité) du circuit sont indépendantes du temps. Si ces grandeurs varient avec le temps, on parle de *régime variable*. C'est le cas de la tension délivrée par le secteur (tension $u(t) = u_0 \cos(2\pi ft + \phi)$) :



C'est une tension sinusoïdale, de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

*. Décret 88-1056 du 14 novembre 1988

Remarque

En TP, si, en cherchant un signal, vous trouvez quelque chose qui varie à cette fréquence, il est probable que ce soit du bruit dû à l'alimentation de l'appareil par le secteur...

Lorsqu'on souhaite mesurer une grandeur électrique, deux modes sont possibles. En régime continu, le mode DC ("Direct Current") donne la valeur instantanée du signal. En régime sinusoïdal, le mode AC ("Alternative Current") donne la **valeur efficace** du signal. Certains appareils sont dotés d'une entrée AC+DC : si on a $u(t) = u_1 + u_0 \cos(2\pi ft + \phi)$, la valeur donnée par l'appareil est $\sqrt{u_1^2 + u_{\text{eff}}^2}$. Dans le cas du secteur, on a $u_1 = 0$ et $f = 50\text{Hz}$.

Exercice 1 ❤️

A quoi correspondent les "230 V du secteur" ? En déduire son amplitude u_0 .

Pour un signal périodique de période T , on définit la valeur moyenne et la valeur efficace comme

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt}$$

La valeur moyenne vaut 0 pour le secteur, et la valeur efficace vaut :

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{u_0^2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1 + \cos(4\pi ft + 2\phi)}{2} dt} \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi} \underbrace{[\sin(4\pi ft + 2\phi)]_{t_0}^{t_0+T}}_{\text{période } T/2}} \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

L'amplitude u_0 vaut alors 325 V.

Exercice 2 ⚡

Quelles sont les valeurs efficaces pour des tensions triangulaires et carrés ?

De la même manière, on montre que :

- pour un signal triangulaire : $\bar{u} = 0$, $u_{\text{eff}} = u_0/\sqrt{3}$
- pour un signal carré : $\bar{u} = 0$, $u_{\text{eff}} = u_0$

Remarque

La ligne du **RER B** est découpée en deux parties, chacune possédant son propre système électrique : le sud de la ligne (appartenant à la RATP) est électrifié en 1 500 volts continu, alors que le nord (appartenant à la SNCF) est électrifié en 25 000 volts alternatif.

7 - Système triphasé

À l'heure actuelle, la production et le transport de l'énergie électrique se font en grande partie sous forme triphasée : l'énergie électrique est véhiculée par trois fils (appelés "phases") dont les tensions sont :

$$u_1 = u_0 \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (\text{II.4})$$

$$u_2 = u_0 \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \varphi + 2\pi/3) \quad (\text{II.5})$$

$$u_3 = u_0 \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \varphi + 4\pi/3) \quad (\text{II.6})$$

De plus, l'électricité est transportée par des lignes haute tension (400 000 V). Nous verrons l'intérêt de ces conditions de transport particulières en exercice.

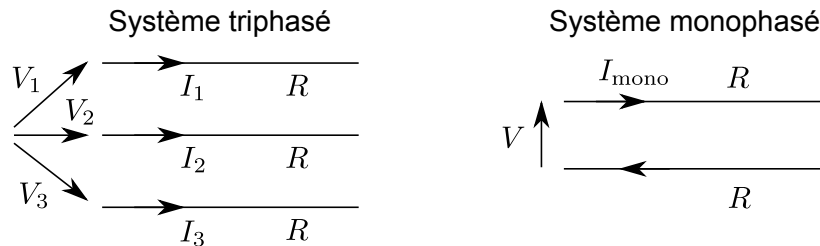


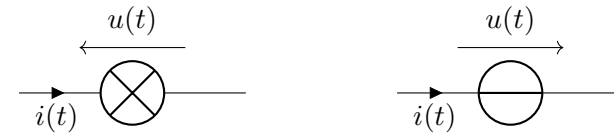
FIGURE 3 – Comparaison des systèmes monophasé et triphasé.

Néanmoins, la plupart des appareils domestiques fonctionnent en monophasé (four électrique, plaques à induction, alimentation PC, machine à laver...) : l'électricité arrive par les lignes HT sous forme triphasée et est distribuée sous forme monophasée aux particuliers via un transformateur.

Le particulier est relié au réseau via deux câbles appelés *phase* et *neutre* : le premier est relié à une des trois phases du réseau, le second est relié à la terre au niveau du transformateur. Il est donc "moins" dangereux de toucher le neutre que la phase : la différence de potentiel est assez faible entre la terre et le neutre, inférieure à 1 V. En revanche, toucher la phase est très dangereux (car mortel, comme nous allons le voir un peu plus tard).

L'utilisation directe du triphasé concerne essentiellement les machines électriques de forte puissance utilisées dans l'industrie et la traction électrique.

8 - Convention récepteur - générateur



La convention d'orientation où i et u sont en sens opposé est appelée *convention récepteur*.

La convention d'orientation où i et u sont dans le même sens est appelée *convention générateur*.

9 - Puissance électrique

En *convention récepteur*, la puissance reçue par un dipôle est définie comme :

$$P(t) = u(t)i(t) \quad (\text{II.7})$$

Dans cette convention, si $P > 0$ le dipôle est dit *récepteur*, si $P < 0$, le dipôle est dit *générateur*.

En *convention générateur*, la puissance $P(t) = u(t)i(t)$ est la puissance fournie par le dipôle. Dans cette convention, si $P > 0$ le dipôle est dit *générateur*, si $P < 0$, le dipôle est dit *récepteur*.

L'unité de puissance est le watt (W), qui correspond à des J.s^{-1} . On peut mesurer une puissance électrique directement à l'aide d'un wattmètre, qui est un appareil effectuant lui-même le produit tension-courant.

Ordres de grandeur

- Cerveau : 10 W
- Ampoule : 100 W
- Bouilloire - radiateur : 1 kW
- Eolienne : 1 MW
- Humain : ~ 100 W
- Centrale nucléaire* : 1 GW
- Puissance électrique mondiale : 10 TW

*. En France, on compte 56 réacteurs, répartis sur 18 centrales.

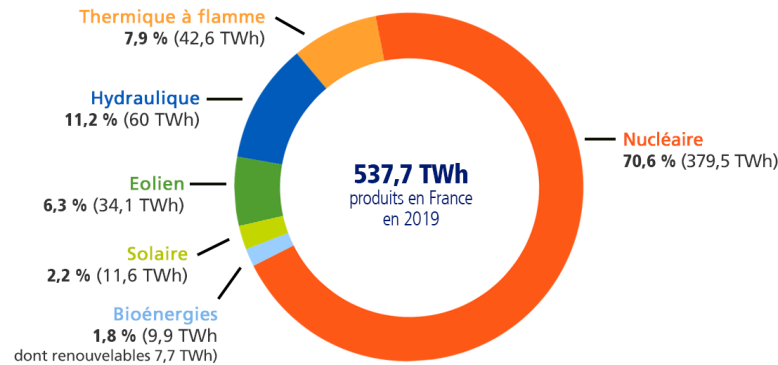


FIGURE 4 – Production électrique française en 2019 (Source : RTE)

Exercice 3

A partir de vos connaissances en électrostatique, justifier l'expression donnée pour la puissance électrocinétique reçue par un dipôle quelconque.

En convention récepteur par exemple : que doit-on fournir au circuit comme travail pour transférer les charges positives d'un point A à un point B ?

Pendant l'intervalle de temps dt , une charge dq entre en A, $dq = idt$ sort en B. Le dipôle reçoit donc une énergie dqV_A et perd une énergie dqV_B . Il reçoit donc $dE = (V_A - V_B)dq$, soit une puissance $P = \frac{dE}{dt} = ui$.

Régime alternatif : En régime alternatif sinusoïdal, la puissance moyenne consommée par un dipôle alimenté par une tension $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi_u)$ et traversé par un courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi_i)$ est ^{*} :

On utilise la notation $\langle \cdot \rangle$ pour désigner la valeur moyenne temporelle.

$$\begin{aligned}
 \langle P \rangle &= \langle u(t)i(t) \rangle \\
 &= \langle u_0 i_0 \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_i) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} u_0 i_0 \langle \underbrace{\cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)}_{\text{moyenne nulle}} + \cos(\phi_i - \phi_u) \rangle \\
 &= u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos(\phi)
 \end{aligned}$$

avec $\phi = \phi_i - \phi_u$

Le rapport $\lambda = \langle P \rangle / u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} = \cos(\phi)$, compris entre 0 et 1, est appelé *facteur de puissance*. La puissance moyenne consommée est maximale lorsque le courant et la tension sont en phase.

Définition

On distingue la *puissance apparente* $P = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$ (en VA) de la *puissance active* $P_a = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos(\phi)$ (en W) et de la *puissance réactive* $P_r = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin(\phi)$ (en VAR) .

Quand un distributeur fournit de l'électricité à un ménage, pourquoi cherche-t-on à avoir $\cos(\phi) = 1$?

Considérons un dipôle entraînant un déphasage ϕ . Si on réduit le facteur de puissance, la puissance active est réduite aussi. Pourtant la puissance apparente n'est pas modifiée, et le courant traversant les lignes d'alimentation peut être élevé, entraînant des pertes par effet Joule. La puissance consommée est faible, mais les pertes par effets Joules sont toujours présentes. Un facteur de puissance faible implique que beaucoup d'énergie est gaspillée.

*. On utilise $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

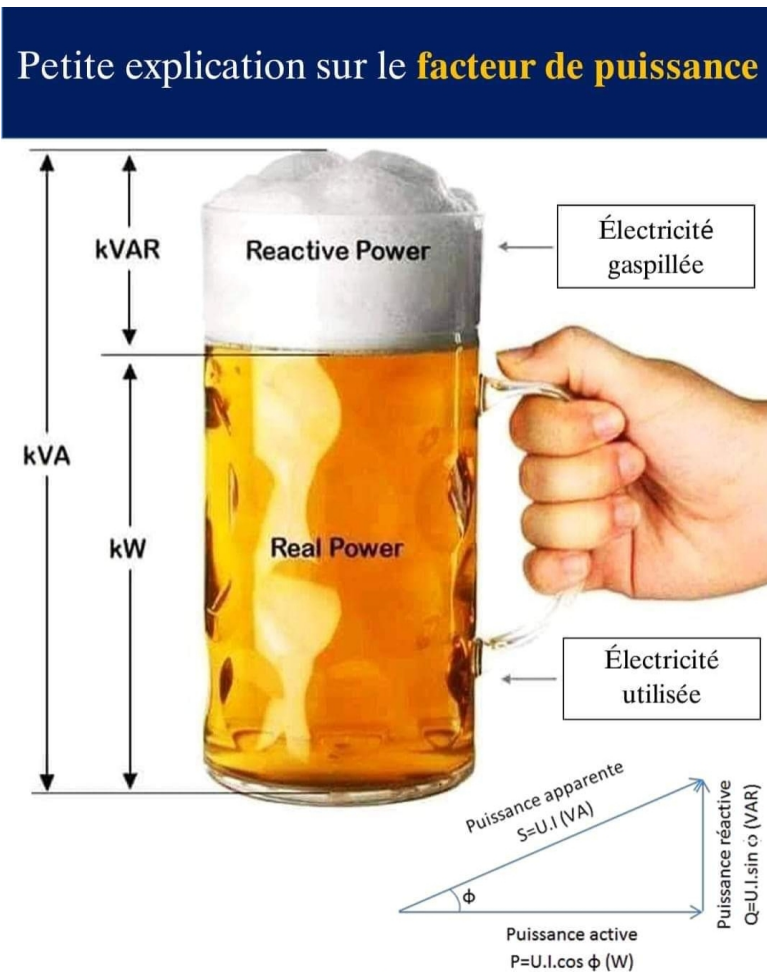


FIGURE 5 – A consommer avec modération...

III Dipôles usuels

Un dipôle est caractérisé par la tension u entre ses bornes, et l'intensité i qui le traverse. Expérimentalement, si l'on impose une certaine tension u (continue) à ses bornes, il en résulte une valeur donnée du courant i (et réciproquement). La donnée de i en fonction de u ($i = f(u)$) est appelée **caractéristique** du dipôle. La relation la plus simple que nous pouvons imaginer est une relation affine (résistances, générateurs) : de tels dipôles sont dits *linéaires*.

De manière plus générale, en régime quelconque (continu ou variable), on appelle *dipôle linéaire* tout dipôle pour lequel $u(t)$ et $i(t)$ sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La relation la plus simple que nous pouvons imaginer est une équation différentielle du premier ordre (condensateurs, bobines).

1 - Résistance

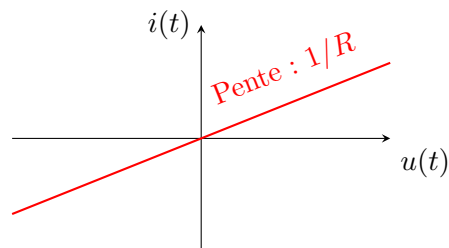
Une résistance (ou résistor) est un composant dont la tension u à ses bornes et l'intensité i vérifient, en *convention récepteur*, la **loi d'Ohm** :

$$u = Ri$$

R est appelée *résistance* : elle est *positive* et s'exprime en ohms (Ω). On peut également définir la *conductance* G définie en Ω^{-1} , ou siemens (S), comme l'inverse de la résistance :

$$G = \frac{1}{R} \quad (\text{III.1})$$

La caractéristique d'une résistance est donc :



Ordres de grandeur

- Résistance d'un fil électrique : 0.1Ω
- Corps humain : $2 \text{ k}\Omega$
- Résistance de contact : $\sim 1 \Omega$
- Résistance usuelles en TP : $1 - 100 \text{ k}\Omega$
- Résistance de sortie d'un GBF : 50Ω
- Résistance interne d'un oscilloscope : $1 \text{ M}\Omega$

On représente une résistance par :

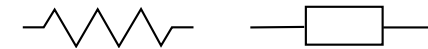


FIGURE 6 – *Gauche* : symbole américain, *Droite* : symbole européen

Remarque

Un ampèremètre idéal a une tension nulle entre ses bornes. En réalité, il possède une résistance interne ($\sim 1 \text{ m}\Omega$), mais cette résistance interne dépend du calibre utilisé). De même pour le voltmètre : la résistance d'un voltmètre idéal devrait être infinie (afin de ne pas être traversé par un courant et ainsi changer la tension mesurée aux bornes du dipôle). En réalité, cette résistance interne est finie ($\sim 10 \text{ M}\Omega$), mais comme pour l'ampèremètre cette résistance interne dépend du calibre utilisé). Enfin, il existe dans un montage des résistances parasites au niveau des soudures électriques : les résistances de contact ($\sim 1 \Omega$).

Pour un conducteur cylindrique de longueur ℓ et de section s , la résistance vaut $R = \rho\ell/s$. La quantité ρ est la résistivité du conducteur (mesurée en $\Omega.m$), et son inverse, notée γ ou σ , est appelée conductivité (mesurée en $S.m^{-1}$). La conductivité électrique va de $10^{-20}S.m^{-1}$ (Teflon) à quelques $10^7S.m^{-1}$ pour les bons conducteurs (cuivre typiquement) ^{*}.

Exercice 4

Puissance dissipée par une résistance.

1. Qu'est-ce que l'effet Joule ?
2. Justifier l'intérêt d'utiliser des lignes haute tension pour le transport de l'électricité.
3. Justifier le recours à un transport triphasé de l'électricité.

Notations :

- Les câbles d'alimentations sont soumis à une tension $u(t)$ et traversés par un courant $i(t)$.
- La résistance des câbles entraîne une chute ohmique $u_R(t) = Ri(t)$.
- On note $P = ui$ la puissance transportée par les câbles et $P_J = u_R i$ la puissance perdue par effet Joule.
- Pour le système triphasé (voir page 10) :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \sqrt{2} \cos(2\pi ft) & i_1 &= i_{\text{tri}} \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \phi) \\ u_2 &= u_0 \sqrt{2} \cos(2\pi ft - 2\pi/3) & i_2 &= i_{\text{tri}} \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \phi - 2\pi/3) \\ u_3 &= u_0 \sqrt{2} \cos(2\pi ft - 4\pi/3) & i_3 &= i_{\text{tri}} \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \phi - 4\pi/3) \end{aligned}$$

1. La puissance reçue par une résistance est $P_J = Ri^2$, dissipée sous forme de chaleur. Ainsi, le passage d'un courant dans une résistance se manifeste par un échauffement du composant, c'est l'effet Joule.

^{*}. La conductivité électrique est la grandeur physique qui varie le plus dans l'Univers : près de 30 ordres de grandeur entre isolants et conducteurs !

2. Pour une puissance transportée $P = ui$, la puissance perdue par effet Joule est $P_J = R(P/u)^2$. On a donc tout intérêt à augmenter la tension / réduire l'intensité pour le transport de l'électricité.

3. La puissance totale instantanée transportée par la ligne triphasée est $P_{\text{tri}}(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$, avec :

$$\begin{aligned} P_1(t) &= u_1(t)i_1(t) = u_0 i_{\text{tri}} [\cos(\phi) + \cos(4\pi ft + \phi)] \\ P_2(t) &= u_2(t)i_2(t) = u_0 i_{\text{tri}} [\cos(\phi) + \cos(4\pi ft + \phi - 4\pi/3)] \\ P_3(t) &= u_3(t)i_3(t) = u_0 i_{\text{tri}} [\cos(\phi) + \cos(4\pi ft + \phi - 2\pi/3)] \end{aligned}$$

En sommant, les termes en $\cos(4\pi ft)$ s'annulent, et il reste $P_{\text{tri}}(t) = 3u_0 i_{\text{tri}} \cos(\phi)$.

Pour transporter la même puissance avec la même tension que dans une ligne monophasée, on doit avoir $i_{\text{mono}} = 3i_{\text{tri}}$.

La puissance perdue par effet Joule dans les deux cas est donc :

$$P_{J,\text{tri}} = 3Ri_{\text{tri}}^2 \quad P_{J,\text{mono}} = 2Ri_{\text{mono}}^2 = 18Ri_{\text{tri}}^2 = 6P_{J,\text{tri}}$$

Le pertes Joule sont donc plus importantes dans le monophasé.

Cependant le problème n'est pas aussi simple : pour ne pas abîmer le câble, on ne peut pas dimensionner une ligne qui laisse passer un courant i comme une ligne qui supporte un courant $3i$. Il faut donc tripler la section du câble monophasé. Sa résistance est alors divisée par 3 :

$$P_{J,\text{mono}} = 2\frac{R}{3}(3i_{\text{tri}})^2 = 2P_{J,\text{tri}}$$

Les pertes sont donc toujours inférieures dans le triphasé. De plus, le volume de métal nécessaire pour la construction des câbles est inférieur dans le triphasé :

$$V_{\text{tri}} = 3L \times S \quad V_{\text{mono}} = 2L \times 3S = 2V_{\text{tri}}$$

On a donc tout intérêt à transporter l'électricité dans des lignes triphasées !

Il faut garder à l'esprit qu'environ 10% de la production électrique nationale est consommée dans le réseau (pertes par effet Joule dans les lignes et pertes dans les transformateurs) : c'est l'équivalent de 5 centrales nucléaires ! Pour diminuer l'effet Joule, donc le courant i , on peut augmenter la tension u grâce à des transformateurs : c'est pourquoi les grandes lignes de transport de l'électricité sont portées à des tensions de plusieurs centaines de kilovolts. L'emploi de transformateurs pour transporter des hautes tensions fut un argument important aussi qui favorisa le déploiement de la distribution de courant alternatif par rapport au courant continu, à la fin du XIXe siècle^{*}.

Attention

Quelques éléments au sujet de la sécurité

- Un des dangers de l'électricité est l'échauffement par effet Joule : un fil ou une connexion traversé par un courant électrique chauffe et peut ainsi provoquer un **incendie**. Un dispositif de protection contre ce risque domestique est le disjoncteur^{**} qui interrompt la circulation du courant au-delà d'un certain seuil d'intensité (de l'ordre de 10 A).
- Un autre risque électrique important est l'**électrocution** : un courant dont l'intensité est supérieure à 25 mA provoque une paralysie respiratoire, et peut être mortel. La résistance du corps humain étant de $2500\ \Omega$ en moyenne, et la tension du secteur de 230 V, l'intensité du courant qui peut traverser le corps humain est, d'après la loi d'Ohm, de l'ordre de 100 mA, et est donc suffisante pour provoquer la mort. Pour s'en protéger, on utilise un autre dispositif : le disjoncteur différentiel, qui coupe le courant si la différence d'intensité qui parcourt la phase et le neutre est supérieure à 30 mA. Par exemple, le disjoncteur différentiel arrête le courant si le fil de phase touche la carcasse métallique d'un appareil, ou si une personne (reliée au sol) touche directement la phase. En revanche, le disjoncteur différentiel ne protège pas si on touche simultanément la phase et le neutre.

Pour ces dispositifs électromécaniques, le principe est souvent le même : le courant électrique parcourt une bobine, qui crée un champ magnétique, qui exerce une force sur un élément mécanique du circuit qui peut fermer

^{*}. Voir l'article https://fr.wikipedia.org/wiki/Guerre_des_courants pour plus d'informations sur la bascule entre courant continu et courant alternatif.

ou ouvrir le circuit si le courant est trop élevé ou trop faible. Si la cause du coupure de courant est réglée, on peut alors "réarmer" le disjoncteur.

Ordres de grandeur

Effets du courant électrique alternatif sur le corps humain :

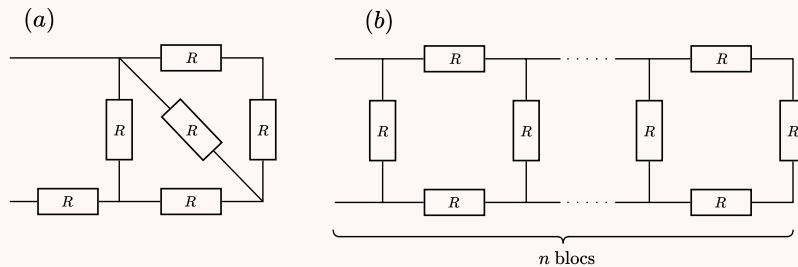
- 0.5 mA : perception cutanée
- 5 mA : secousse électrique
- 10 mA : contracture entraînant une incapacité à lâcher prise
- 25 mA : téτανisation des muscles respiratoires (asphyxie au-delà de 3min)
- 40 mA pendant 5 secondes, 50 mA pendant 1 seconde : fibrillation ventriculaire
- 2 A : inhibition des centres nerveux

Pour stopper la fibrillation ventriculaire, les défibrillateurs produisent des décharges de l'ordre du kilovolt en une dizaine de millisecondes.

^{**}. Il y a plusieurs types de disjoncteur, anciennement le fusible était répandu (fil confiné dans du verre ou de la céramique, qui se casse au-delà d'un certain seuil de courant), des dispositifs électromécaniques, plus pratiques, les ont aujourd'hui remplacés.

Exercice 5 ❤️

1. Rappeler les lois d'association en série et en parallèle des résistances.
2. *Application* : Calculer la résistance équivalente pour les montages ci-dessous. (On traitera les cas $n = 1, 2, 3$ et $+\infty$ pour le second montage, n étant le nombre de mailles).



1. Pour des résistances en série, on somme les résistances. Pour des résistances en parallèle, on somme les conductances.



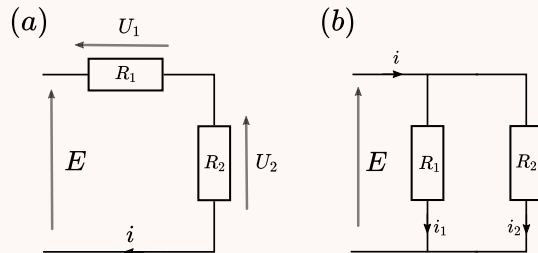
2. Pour ce genre de problème, une méthode simple et efficace consiste à simplifier pas à pas le circuit en calculant à chaque étape les résistances équivalentes. On ajoute les résistances en séries, puis celles en parallèle, et ainsi de suite.

a) La résistance équivalente est $R_{\text{eq}} = 13R/8$.

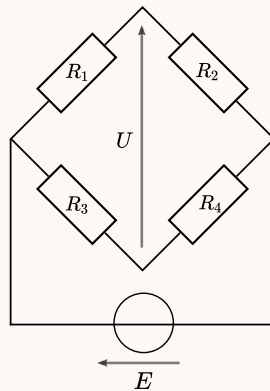
b) Les résistances équivalentes sont $R_{\text{eq},1} = \frac{3R}{4}$, $R_{\text{eq},2} = \frac{11R}{15}$ et $R_{\text{eq},3} = \frac{41R}{56}$. Pour le cas $n \rightarrow +\infty$, on peut partir du principe qu'ajouter un bloc ne change pas la résistance équivalente. On obtiens alors $(R_{\text{eq}}/R)^2 + 2(R_{\text{eq}}/R) - 2 = 0$. La résolution de l'équation donne $R_{\text{eq}} = R(\sqrt{3} - 1)$

Exercice 6 ♥

On considère les deux montages suivants :



1. *Pont diviseur de tension* : dans le premier montage, donner U_1 en fonction de R_1 , R_2 et E . Généraliser.
2. *Pont diviseur de courant* : dans le deuxième montage, donner i_1 en fonction de R_1 , R_2 et i . Généraliser.
3. *Application* : Proposer un montage permettant de mesurer la résistance interne d'un GBF.
4. *Application*. Dans le montage suivant (pont de Wheatstone), donner la relation entre R_1 , R_2 , R_3 et R_4 qui permet de vérifier $U = 0$. A quoi peut servir un tel montage ?



1. On applique la loi des mailles au circuit :

$$E = U_1 + U_2 \quad i = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

On a donc :
$$U_1 = E \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

2. On applique la loi des mailles et la loi des noeuds au circuit :

$$i = i_1 + i_2 \quad i_1 R_1 = i_2 R_2$$

On a donc :
$$i_1 = i \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

3. On peut réaliser un pont diviseur de tension dont une des résistances est variable R , et la seconde est la résistance interne r du GBF, et on observe le signal à l'oscilloscope. Lorsque $r = R$, l'amplitude du signal mesurée est divisée par 2.

4. Le potentiel entre R_3 et R_4 est donné par un pont diviseur de tension : $V_{34} = E \frac{R_4}{R_3 + R_4}$. De même, le potentiel entre R_1 et R_2 est $V_{12} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Lorsque $U = 0$, on a donc $V_{12} = V_{34}$, soit :

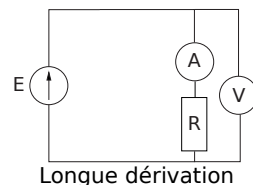
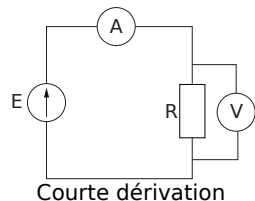
$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

On peut utiliser un pont de Wheatstone pour mesurer une résistance inconnue. Si on prend par exemple R_1 et R_2 connus, R_2 variable et R_4 inconnu, on fait varier R_2 jusqu'à obtenir $U = 0$.

Exercice 7 ♥

Méthodes de mesure de résistance.

1. Proposer deux montages possibles pour mesurer une résistance à partir d'une source de tension, d'un ampèremètre et d'un voltmètre. Donner l'inconvénient de chaque montage.
2. Discuter, en fonction de R , quel est le montage le plus précis.
3. Comment le résultat précédent est-il modifié si on prend en compte les résistances de contact ?
4. Proposer un montage permettant de s'affranchir des résistances de contact. Application ?



1. On branche en série un générateur, un ampèremètre, et la résistance à mesurer. Selon comment on branche le voltmètre, on peut alors utiliser un montage courte dérivation (mesure de tension sur la résistance uniquement) ou longue dérivation (mesure de tension sur l'ensemble résistance et ampèremètre).

Le montage courte dérivation mesure la vraie tension aux bornes de la résistance, mais l'ampèremètre mesure aussi le courant dans le voltmètre. Il faut prendre en compte la résistance interne du voltmètre.

Le montage longue dérivation mesure le vrai courant traversant la résistance, mais le voltmètre mesure aussi la tension aux bornes de l'ampèremètre.

2. Le montage courte dérivation est adapté si le courant traversant le voltmètre est négligeable devant celui traversant la résistance. Il est donc adapté pour de faibles résistances (devant la résistance interne du voltmètre). Le montage longue dérivation est adapté si la tension aux bornes de l'ampèremètre est négligeable devant la tension aux bornes de la résistance. Il est donc adapté pour de grandes résistances (devant la résistance interne de l'ampèremètre). Pour des résistances intermédiaires, on pourra utiliser sans soucis l'un ou l'autre des configurations.

3. Lorsqu'on cherche à mesurer une résistance faible d'un dipôle petite devant le ohm, il faut prendre en compte des résistances qu'on ne considère que rarement : les résistances de contact (en l'occurrence celles des soudures). Dans une mesure à 2 points classique, la tension mesurée est $\Delta V = R_{\text{dipole}} I_{\text{circuit}} + 2R_{\text{contact}} I_{\text{voltmètre}}$. Si on cherche à mesurer des résistances du même ordre que celle des contacts, la valeur mesurée sera faussée.

4. Pour mesurer la résistance réelle du fil, il faut utiliser une mesure dite *4 points* : les fils d'amenée du courant et ceux de la mesure de la tension ne doivent pas être connectés au même point du composant dont on veut mesurer la résistance. On utilise alors deux fils pour injecter le courant dans le circuit, et deux autres fils pour mesurer la tension aux bornes de la résistance. Comme le courant traversant le voltmètre est négligeable devant celui traversant la résistance, les résistances de contact sont ignorées : $\Delta V \approx R_{\text{dipole}} I_{\text{circuit}}$. Certains multimètres de la collection permettent d'ailleurs de faire directement une mesure à 4 points.

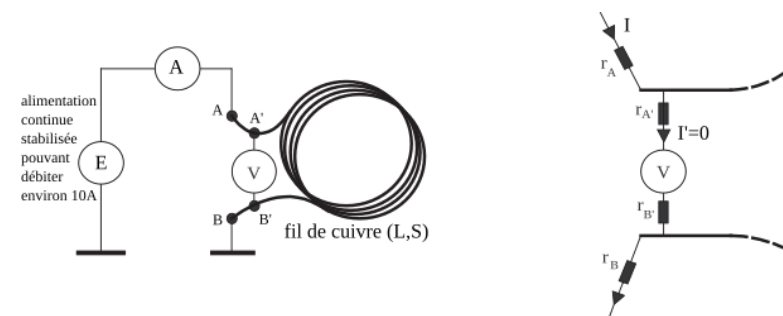


FIGURE 7 – Exemple de montage 4 points pour la mesure de la résistance d'un fil de cuivre

2 - Sources de tension et de courant

Une source de tension **idéale** délivre une tension $u = e$ à ses bornes quel que soit le courant i qui la traverse. e est appelée *force électromotrice* (ou *f.e.m.*) de la source.



Une source de courant **idéale** délivre le courant $i = \eta$ quel que soit la tension u à ses bornes. η est appelé *courant électromoteur* (ou *c.e.m.*) de la source.



Attention

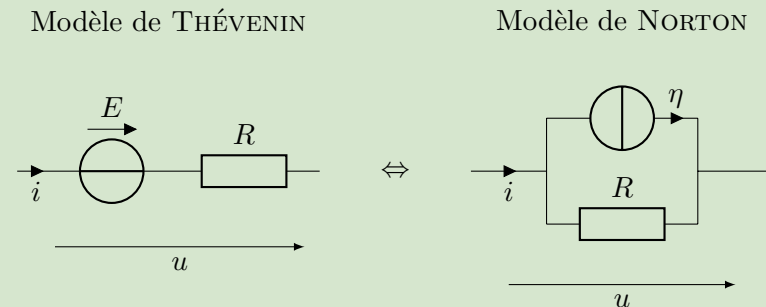
Ces définitions permettent de dégager deux notions importantes de sécurité :

- il ne faut jamais placer de **court-circuit** (interrupteur fermé, fil) entre les bornes d'un générateur de tension : celui-ci cherchera alors à augmenter (indéfiniment) le courant pour tenter d'imposer une tension...qu'il n'arrivera jamais à atteindre. Le courant augmentant, l'appareil est détruit.
- il ne faut jamais placer de **coupe-circuit** (interrupteur ouvert) entre les bornes d'un générateur de courant : ce dernier cherchera à augmenter la tension entre ses bornes afin d'imposer le courant, mais ceci n'arrivera jamais, et l'augmentation de la tension conduit à la destruction de l'appareil.

Dans la réalité, un générateur (qui délivre un courant ou une tension) a souvent une caractéristique affine. On peut modéliser cette source de deux manières : soit par l'association en série d'une source de tension idéale et d'une résistance appelée *résistance interne* (c'est le modèle de **Thévenin**) ; soit par une source idéale de courant en parallèle d'une résistance (modèle de **Norton**).

Équivalence Thévenin-Norton ♥

Les modèles de Thévenin et de Norton sont équivalents si $E = R\eta$.

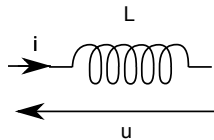


3 - Bobine

Une bobine (ou inductance) est constituée d'un enroulement de spires conductrices. La tension $u(t)$ aux bornes d'une bobine idéale traversée par un courant $i(t)$ vérifie :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

avec L l'inductance de la bobine, exprimée en Henry (H). On symbolise une bobine par le schéma suivant :



Remarque

En régime continu, i est constant, la tension aux bornes de la bobine est nulle (la bobine constitue un court-circuit).

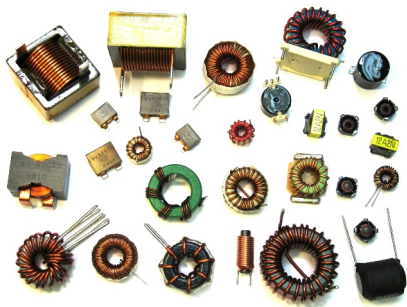


FIGURE 8 – Bobines de conceptions différentes

Exercice 8 ♥

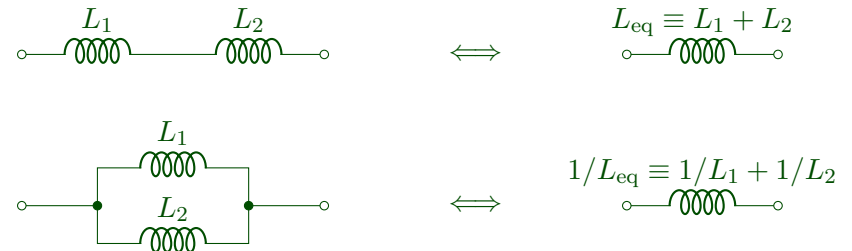
- Calculer la puissance reçue par une bobine, et montrer qu'elle dérive d'une énergie. En déduire une propriété sur le courant qui traverse une bobine.
- Donner les lois d'association des bobines en série et en parallèle.

a) La puissance instantanée reçue par une bobine est :

$$P(t) = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Elle dérive d'une énergie $W = \frac{1}{2} Li^2$. De plus l'énergie est une grandeur continue, donc l'intensité traversant une bobine est une grandeur continue elle aussi.

b) Pour des inductances en série, on somme les inductances. Pour des inductances en parallèle, on ajoute les inverses des inductances.



Ordres de grandeur

- Bobine en TP : 10 à 100 mH

4 - Condensateur

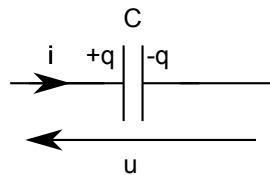
Un condensateur est constitué de deux armatures qui se font face et qui portent des charges opposées $+q$ et $-q$. Les deux armatures du condensateur peuvent être séparées par du vide, mais plus fréquemment par un matériau isolant (diélectrique). Pour un condensateur idéal, la charge $q(t)$ est proportionnelle à la tension $u(t)$ appliquée entre les armatures :

$$q(t) = Cu(t)$$

avec C la capacité du condensateur exprimée en Farads (F). La relation tension-intensité prend alors la forme :

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

La convention de représentation d'un condensateur est la suivante :



Un condensateur est généralement constitué de deux plaques conductrices parallèles. Pour des plaques planes de surface S et séparées d'une distance e , la capacité s'exprime $C = \epsilon S/e$, où $\epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$ est la permittivité diélectrique du milieu entre les deux plaques. La capacité étant proportionnelle à la surface des plaques, on a souvent recours à des enroulements ou des empilements pour maximiser la capacité.



FIGURE 9 – Différents types de condensateurs

Ordres de grandeur

- Condensateur en TP : 1 nF à 10 μ F
- Entrée d'un oscilloscope : 10 pF

Remarque

Pour construire son propre condensateur à la maison :

https://youtu.be/Nl73TPL_g8M

Exercice 9 ♥

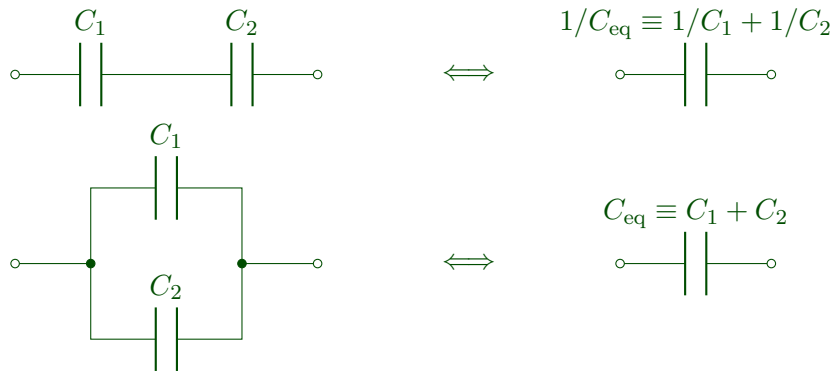
- Calculer la puissance reçue par un condensateur, et en déduire l'énergie emmagasinée. En déduire une propriété sur la tension aux bornes d'un condensateur.
- Donner les lois d'association des condensateurs en série et en parallèle.

a) La puissance instantanée reçue par le condensateur est :

$$P(t) = ui = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2C} q^2 \right)$$

L'énergie emmagasinée est donc $W = \frac{1}{2} Cu^2$. De plus l'énergie est une grandeur continue, donc la tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue elle aussi.

b) Pour des condensateurs en série, on somme les inverses des capacités.
Pour des condensateurs en parallèle, on ajoute les capacités.



IV Régime transitoire des circuits linéaires du premier ordre

On rappelle qu'un circuit linéaire est un circuit dans lequel les grandeurs électriques sont reliées entre elles par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*. En particulier, on appelle circuit linéaire *du premier ordre* un circuit dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par une équation différentielle du premier ordre.

Ce chapitre sera l'occasion de nous intéresser à deux types de régimes. Lors d'une modification d'une des grandeurs du circuit, les grandeurs électriques évoluent jusqu'à un état stable, appelé **régime permanent**. Le régime d'évolution associé au passage d'un régime permanent à un autre est appelé **régime transitoire**. Il peut être caractérisé par un taux d'amortissement, un temps de relaxation ou encore un facteur de qualité. En particulier, le **régime libre** (ou *régime propre*) d'un système est la réponse en l'absence d'excitation (il s'agit du régime transitoire associé à l'extinction des sources de courant et de tension). Tandis que le régime permanent correspond à une solution particulière de l'équation différentielle qui régit l'évolution du circuit, le régime libre correspond à la solution à l'équation différentielle homogène.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement à la réponse du système à un changement abrupte d'une des grandeurs électriques (par exemple, un générateur délivre la tension $e(t < 0) = 0$ et $e(t \geq 0) = E$, appelé échelon de tension).

Methode

Pour résoudre une équation différentielle, il faut procéder dans l'ordre ! On trouve une solution particulière, on trouve la forme de la solution homogène (avec des constantes d'intégration pour le moment encore indéterminées) PUIS on trouve les constantes en appliquant les conditions initiales à la solution **globale**

1 - Circuit RC série

Considérons le circuit suivant, le condensateur étant initialement déchargé : $u_c(t < 0) = 0$. Le générateur délivre une tension constante E . À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on étudie la charge du condensateur.

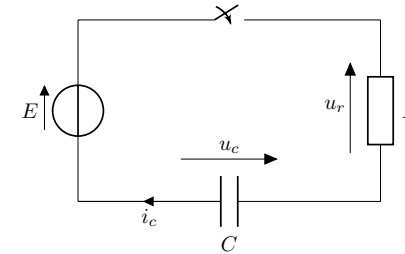


FIGURE 10 – Circuit RC série

Au cours du temps, les électrons vont s'accumuler dans le condensateur, jusqu'à atteindre un état de charge maximal. Ainsi, dans le régime permanent, la tension u_c est constante, donc $i = 0$. La tension du condensateur vaut alors $u_c = E$ à la fin de la charge.

Afin d'établir l'évolution précise du système au cours du temps, on utilise la loi des mailles. On obtiens l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Par identification (ou analyse dimensionnelle^{*}), on appelle $\tau = RC$ la constante de temps du circuit. Elle donne l'ordre de grandeur du temps de charge du condensateur. Puisque l'on connaît une condition initiale au problème, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle.

Commençons par chercher une solution homogène, i.e. une solution à l'équation différentielle avec un second membre nul :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0$$

*. On a $u = Ri$, donc $V = \Omega \times A$. De plus $i = C \frac{du}{dt}$, d'où $A = F \times V/s$. Ainsi : $\Omega \times F = s$.

La solution homogène est donc :

$$u_{c,\text{homo}}(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec λ une constante d'intégration à déterminer plus tard. Pour la solution particulière, on cherche une solution de la forme du second membre. Ainsi $u_{c,\text{part}}$ est une constante. En injectant dans l'équation différentielle, on a simplement :

$$u_{c,\text{part}}(t) = E$$

La solution complète est donc :

$$u_c(t) = u_{c,\text{homo}}(t) + u_{c,\text{part}}(t) = E + \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On trouve λ en utilisant la condition initiale : $u_c(0) = 0$, ce qui donne :

$$u_c(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

L'évolution de $u_c(t)$ est représentée sur la figure 11. On peut faire les approximations suivantes :

- pour $t \ll \tau$, on a $u_c(t) \approx Et/\tau$: il y a une tangente à l'origine
- pour $t \gg \tau$, on a $u_c(t) \approx E$: il y a bien une asymptote à l'infini

Les deux droites se croisent en $t = \tau$. On a alors $u_c(\tau) \simeq 0.63E \simeq \frac{5}{8}E$.

Remarque

L'écran d'un oscilloscope est divisé verticalement en 8 carreaux. Pour une croissance exponentielle, le temps caractéristique est donc atteint quand le signal arrive au cinquième carreau.

De façon conventionnelle, on peut dire que le régime permanent est atteint lorsque $u_c(t)$ est égal à 99% de sa valeur finale. La durée T_R du régime transitoire est donc :

$$T_R = \tau \ln 100 \approx 4.6\tau$$

Il s'agit du temps de réponse du circuit.

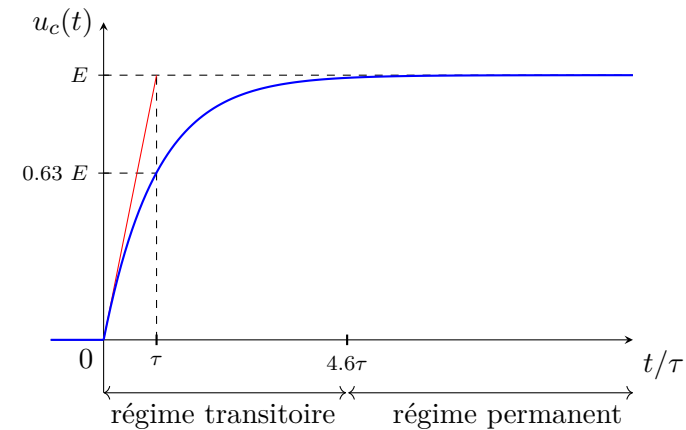


FIGURE 11 – Tension aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension.

Si on reprend l'équation différentielle, celle-ci prend la forme de l'équation d'une droite dans le plan $(u_c, \dot{u}_c)$. Il s'agit du portrait de phase du circuit (Figure 12). Le point d'intersection de la trajectoire est un point fixe, puisque $\dot{u}_c(t) = 0$. Comme le système se déplace vers le point fixe, celui-ci est stable.

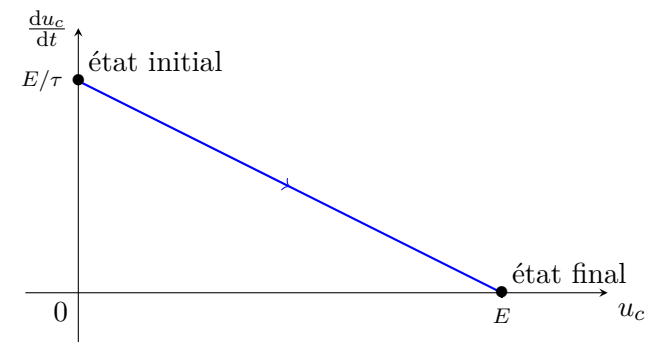


FIGURE 12 – Portrait de phase et trajectoire de phase dans le cas $u_c(0) = 0$.

Enfin, en multipliant la loi des mailles par l'intensité $i(t)$, on obtient le bilan de puissance du circuit :

$$\underbrace{Ei}_{P_{GBF}} = u_c i + u_R i = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right)}_{\mathcal{E}_{\text{elec}}} + \underbrace{Ri^2}_{P_J}$$

Ainsi la puissance cédée par le générateur se divise en une puissance reçue par le condensateur qui la stocke, et une puissance dissipée par effet Joule dans la résistance. Vérifions qu'il y a bien conservation de l'énergie du système. L'intensité du courant dans le circuit est obtenue à partir de la tension du condensateur :

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{CE}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On calcule les différentes énergies entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$:

— l'énergie délivrée par le GBF :

$$W_{GBF} = \int_0^\infty E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{\tau E^2}{R} = CE^2$$

— l'énergie stockée par le condensateur :

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_c(\infty)^2 - \frac{1}{2} C u_c(0)^2 = \frac{CE^2}{2}$$

— l'énergie dissipée par effet Joule :

$$W_J = \int_0^\infty R i^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{\tau E^2}{2R} = \frac{CE^2}{2}$$

On retrouve bien le bilan d'énergie attendu :

$$W_{GBF} = \Delta \mathcal{E}_{\text{elec}} + W_J$$

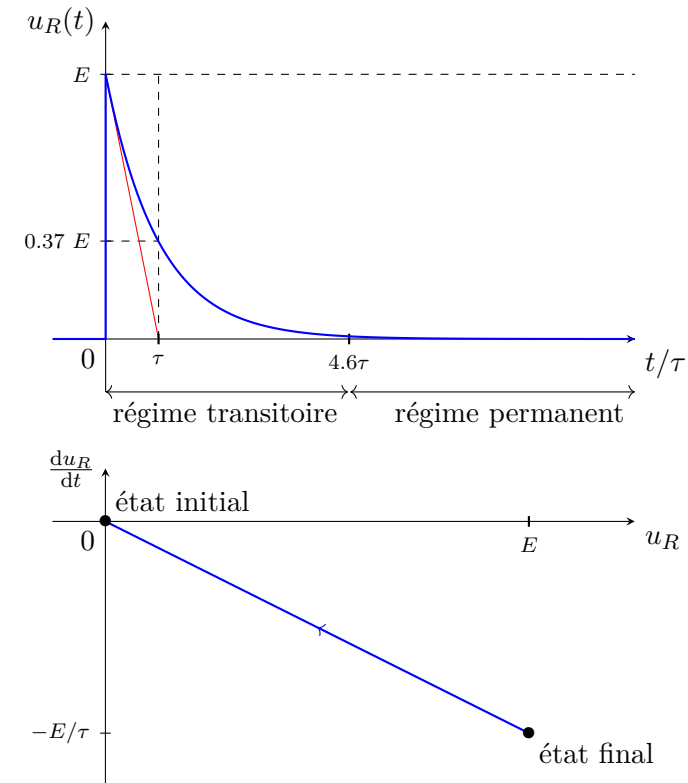
Exercice 10 ⚡

Étude de la résistance. Reprendre le raisonnement précédent, mais en étudiant la résistance plutôt que le condensateur.

On montre que la tension aux bornes de la résistance est :

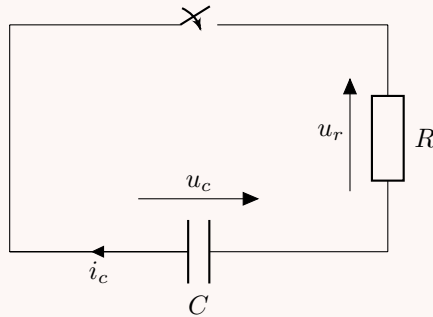
$$u_R(t) = E - u_C(t) = E \exp(-t/\tau).$$

La tension $u_R(t)$ est nulle en régime permanent et possède les mêmes sauts de discontinuités que la consigne $E(t)$.



Exercice 11

Décharge du condensateur. On considère désormais le montage électrique suivant :



Le condensateur est initialement chargé : $u_c(t < 0) = E$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. *Remarque :* Étant donné qu'il n'y a ici aucun terme source, le régime transitoire que nous étudions correspond au régime libre du circuit RC.

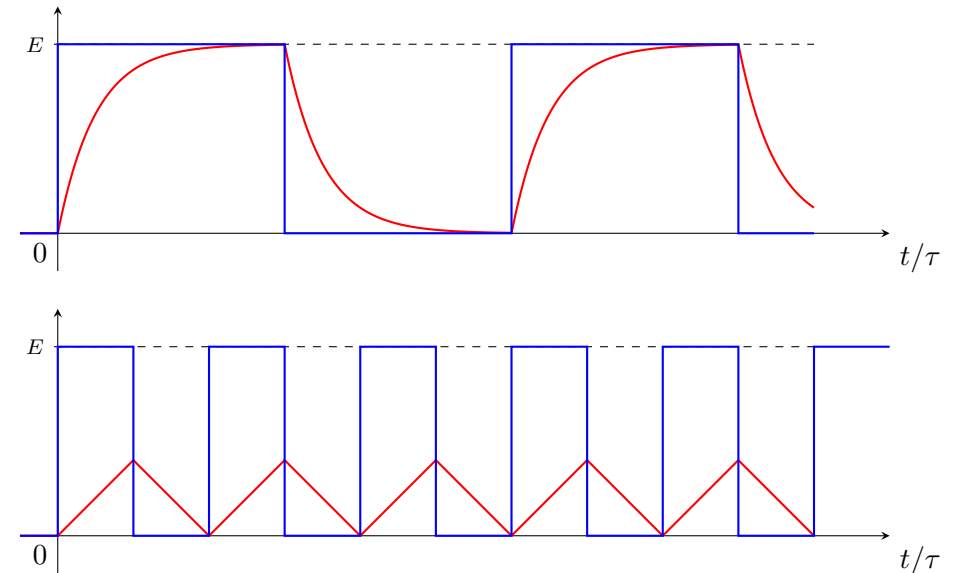
- Donner l'évolution de $u_C(t)$.
- On ajoute en série un GBF délivrant un signal carré de tension entre 0V et E avec une période T . Donner l'allure de $u_C(t)$ et de $i(t)$ lorsque le condensateur est périodiquement chargé et déchargé (on appelle T la durée de charge ou de décharge). On distinguera les régimes $T \gg \tau$ et $T \ll \tau$.

a) En appliquant la loi des mailles, on obtient $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0$, avec $\tau = RC$. La solution est donc de la forme $u_c(t) = \lambda \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$. On utilise la condition initiale $u_c(0) = E$ pour trouver :

$$u_c(t) = E \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right).$$

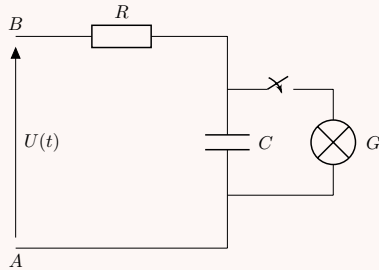
b) Lorsque $T \gg \tau$, le régime permanent est atteint. Si $T \ll \tau$, on obtient un signal triangulaire. On dit alors que le circuit est un intégrateur.

Tension aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à un signal crêteau de période T . En bleu : tension de consigne, en rouge : tension aux bornes du condensateur. *Haut :* on a $T \gg \tau$; *Bas :* on a $T \ll \tau$.



Exercice 12

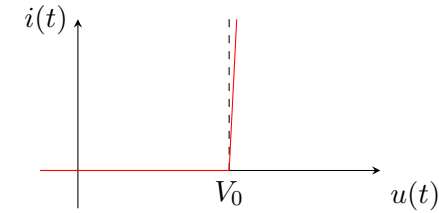
Oscillations de relaxation d'un tube Néon (Pearson-Anson effect). On considère le montage suivant :



La tension $U(t)$ est un échelon de tension à E pour $t > 0$. Le composant noté G est un tube à gaz (Néon)^a Son comportement est le suivant : il se comporte comme une résistance infinie tant que la tension à ses bornes est inférieure à une certaine tension $V_0 < E$, et comme une résistance $r \ll R$ dès qu'elle dépasse V_0 . Lorsque ceci se produit, le condensateur se décharge instantanément en produisant dans le tube un éclair très bref.

- Tracer la caractéristique du tube à gaz.
- On ferme l'interrupteur à $t = 0$: montrer que la tension aux bornes du tube subit des oscillations dont on déterminera la période. Tracer le graphe de cette tension.
- A.N. : $E = 24 \text{ V}$, $R = 1000 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $V_0 = 5 \text{ V}$.

a. Les lampes Néon ne sont rien d'autre que deux électrodes métalliques à l'intérieur d'une ampoule scellée contenant le gaz néon. Aucun courant ne peut circuler entre les électrodes si aucune tension n'est appliquée à leurs bornes : résistance infinie. En revanche, si la tension appliquée excède un certain seuil, le gaz s'ionise (on atteint le champ disruptif du gaz) et le courant peut circuler : la résistance est drastiquement réduite.



On peut calculer le temps pour lequel la tension arrivera à la valeur seuil de V_0

$$u_c(t_0) = V_0 \Rightarrow t_0 = RC \ln \left(\frac{E}{E - V_0} \right) \quad (\text{IV.1})$$

À partir de ce temps, le condensateur se décharge brutalement dans le tube (qui émet un flash lumineux), puis la résistance de celui-ci devient infinie et la charge du condensateur reprend. On a donc une alternance de charge (avec une constante de temps RC)/décharge (instantanée) qui se met en place de manière périodique, la période étant égale au temps que met le condensateur pour atteindre une tension V_0

$$T = RC \ln \left(\frac{E}{E - V_0} \right) = 1000 \cdot 10^{-6} \ln \left(\frac{24}{19} \right) \approx 0,23 \text{ ms} \quad (\text{IV.2})$$

Cette fréquence des flashes lumineux est donc suffisante pour donner l'impression d'un éclairage continu.

2 - Circuit RL série

La situation est semblable à celle du circuit RL :

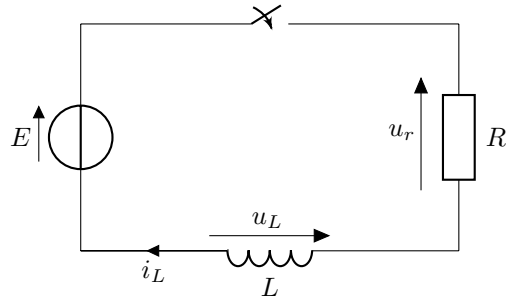


FIGURE 13 – Circuit RL série

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. L'application de la loi des mailles donne ici une équation pour l'intensité semblable au paragraphe précédent, à savoir :

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{E}{L}$$

Le temps caractéristique du circuit RL est $\tau' = \frac{L}{R}$.

Les conditions initiales sont désormais $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ (continuité de l'intensité aux bornes de la bobine, et donc au sein du circuit ; en revanche, il peut y avoir discontinuité de $u_L(t)$), ce qui permet de résoudre l'équation différentielle et ainsi obtenir :

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \right)$$

et par conséquent

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = E \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$$

Ici, l'intensité aux bornes de la bobine est continue (pour que la puissance reçue par la bobine le soit), en revanche la tension aux bornes de la bobine ne l'est pas (elle subit une discontinuité de E à $t = 0$). Tout se passe comme si la bobine bloquait l'établissement du courant pendant le régime transitoire, avant de devenir équivalente à un fil lorsque le régime permanent est établi ($i = \frac{E}{R}$, $u_L = 0$).

La situation est donc symétrique à celle du circuit RC : ici, i_L croît exponentiellement depuis 0 pour atteindre $\frac{E}{R}$, tandis que u_L , après avoir discontinûment pris la valeur E , décroît pour tendre finalement vers 0.

Remarque

Rupture du courant dans une bobine

Si on ouvre à présent l'interrupteur, on se retrouve dans un cas semblable à la décharge du condensateur : la bobine, s'opposant à ce que le courant s'annule soudainement, voit sa tension brusquement passer de 0 à E , puis décroître exponentiellement. Dans le même temps, le courant, initialement de valeur E/R , décroît exponentiellement pour s'annuler. Au total, la bobine fournit au circuit une énergie électrique égale à celle qu'elle avait stockée pendant sa charge.

Application

Un courant i est établi au sein d'un circuit RL. On ouvre le circuit (rupture du courant dans la bobine). Effectuer le bilan de puissance puis le bilan d'énergie du circuit RL.

On multiplie la loi des mailles par l'intensité $i(t)$:

$$\underbrace{Ei}_{P_{GBF}} = u_L i + u_R i = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\mathcal{E}_{\text{elec}}} + \underbrace{Ri^2}_{P_J}$$

V Régime transitoire des circuit linéaires du second ordre

On fait désormais l'étude du régime transitoire de circuits linéaires du *second ordre*, *i.e.* au sein desquels les grandeurs électriques obéissent à une équation différentielle d'ordre 2. Notre étude portera principalement sur l'indécomposable circuit RLC série, qui conduit à l'étude de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti (sur laquelle nous serons bref, la résolution de cette équation ayant déjà été vue en *Mécanique* cette année). Tout au long de ce chapitre, on considère le circuit RLC série suivant :

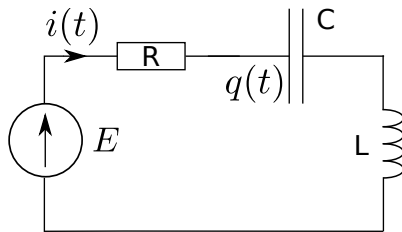


FIGURE 14 – Circuit RLC série

1 - Analogie électro-mécanique

La loi des mailles s'écrit : $e(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$

Tous les dipôles sont traversés par le même courant $i(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad u_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$$

On a donc une équation différentielle d'ordre 2 portant sur la charge $q(t)$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}$$

avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la *pulsation propre* et $Q = 1/2\xi = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$ le *facteur de qualité* (ξ est le *facteur d'amortissement*) du système (on reviendra sur la signification physique de ces quantités). Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Ce type d'équation intervient dans différents domaines

de la physique, notamment en mécanique. Il est alors possible de dresser une analogie entre les grandeurs électriques et mécaniques. En effet, si on considère une particule ponctuelle soumise à une force de rappel $-kx$, des frottements fluides $-\lambda\dot{x}$ et une force F , alors son équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

Le tableau suivant précise la correspondance entre les grandeurs.

Analogie électro-mécanique ♥

	Circuit RLC série	Oscillateur mécanique
Signal	q	x
Signal dérivé	i	v
Paramètres	R	λ
	L	m
	C	$1/k$
Pulsation propre ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$
Facteur de qualité Q	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\frac{\sqrt{km}}{\lambda}$
Temps de relaxation	$\frac{L}{2R}$	$\frac{m}{2\lambda}$
Énergie potentielle / électrostatique	$\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$	$\frac{1}{2} kx^2$
Énergie cinétique / magnétique	$\frac{1}{2} Li^2$	$\frac{1}{2} mv^2$
Dissipation Joule / frottements	Ri^2	λv^2
Équation dynamique	$u = L \frac{d^2q}{dt^2}$	$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

2 - Réponse indicielle du RLC série

On s'intéresse d'abord à la solution de l'équation différentielle homogène du RLC série. Une telle solution revient à considérer un circuit sans source, *i.e.* à faire l'étude du régime libre du circuit. La recherche de solutions de la forme e^{rt} nous conduit à une équation, dite *équation caractéristique*, sur r :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

La forme des solutions dépend du signe de Δ :

- $\Delta > 0$, *i.e.* $Q < \frac{1}{2}$ ($\xi > 1$) : **régime apériodique**

Les deux racines sont négatives, et valent :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = \omega_0 \left(-\xi \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} \right)$$

Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent alors :

$$q(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} = e^{-t/\tau} (A' \cosh(\omega t) + B' \sinh(\omega t))$$

où A et B sont déterminés à partir des conditions initiales, $\tau = 2Q/\omega_0$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

Remarque

Interprétation : $Q < \frac{1}{2} \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, donc dans ce régime l'amortissement est important : le courant envoyé par le condensateur est très vite dissipé par effet Joule, et on a des exponentielles réelles décroissantes comme solution.

- $\Delta < 0$, *i.e.* $Q > \frac{1}{2}$ ($\xi < 1$) : **régime pseudo-périodique**

On a comme racines de l'équation caractéristique :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} \right)$$

et les solutions (réelles) de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$q(t) = e^{-t/\tau} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) = e^{-t/\tau} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$$

en posant $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ la pseudo-pulsation et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}$ le temps d'amortissement.

Remarque

Selon les problèmes, on peut préférer comme forme de solution $A' \cos(\omega t + \phi) e^{-t/\tau}$.

- $\Delta = 0$, *i.e.* $Q = 1/2$ ($\xi = 1$) : **régime critique**

Les solutions sont alors de la forme :

$$q(t) = (A + Bt)e^{-t/\tau}$$

avec $\tau = 1/\omega_0$.

Remarque

Il est évidemment impossible de vérifier expérimentalement la condition $Q = 1/2$, *i.e.* $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. On retiendra que ce régime correspond à un cas limite entre les deux autres régimes. De plus, c'est aussi le régime qui permet d'arriver le plus **rapidement** au régime permanent. Ainsi, si l'on veut concevoir un système où les grandeurs évoluent rapidement, on choisira des paramètres R , L et C tels que l'on soit proche de la condition $Q = 1/2$.

Les constantes d'intégration vont bien sûr dépendre de deux conditions initiales, par exemple $q(t=0) = q_0$ et $i(t=0) = \dot{q}(t=0) = 0$. La valeur des constantes A et B sera différente, mais la forme des solutions (*i.e.* le type de régime) ne dépend pas des conditions initiales *.

*. À titre d'exercice, on peut retrouver la forme des solutions pour $i(t)$, $u_L(t)$, $u_C(t)$...

Réponse à un échelon

La réponse a un échelon de tension est donc

$$q(t) = q^p(t) + q^h(t) = CE + q^h(t)$$

et les constantes de la solution homogène sont déterminées grâce aux conditions initiales connues sur la solution globale.

Exercice 13 ❤️

Déterminer la réponse indicielle du condensateur dans le cas $Q > 1/2$.

La solution totale est de la forme :

$$\frac{q(t)}{CE} = 1 + e^{-t/\tau} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$$

Les conditions initiales sont $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$, donc :

$$\begin{cases} A &= \frac{-1}{\omega\tau} \\ B &= -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{q(t)}{CE} &= 1 - e^{-t/\tau} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega\tau} + \cos(\omega t) \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \left(\sin(\omega t) + \sqrt{4Q^2 - 1} \cos(\omega t) \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\omega_0 t/2Q}}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin \left(\omega_0 t \sqrt{4Q^2 - 1} + \arcsin \sqrt{4Q^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

La Fig.15 montre la tension aux bornes du condensateur pour un signal d'entrée carré. Le régime libre correspond au signal temporel obtenu lorsque $E = 0$, et la réponse indicielle au signal obtenu lorsque $E > 0$.

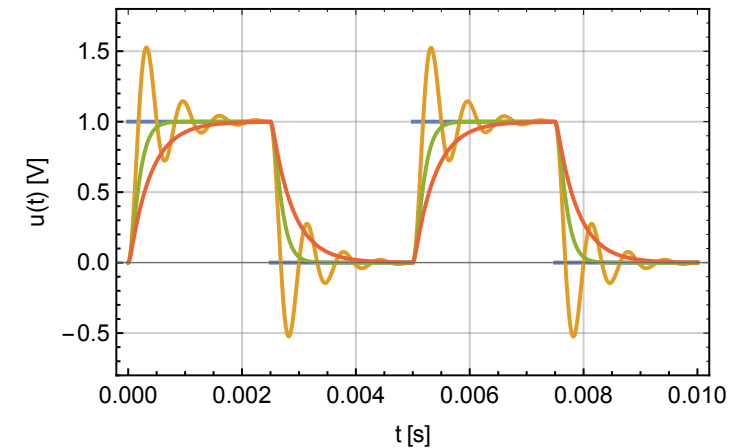
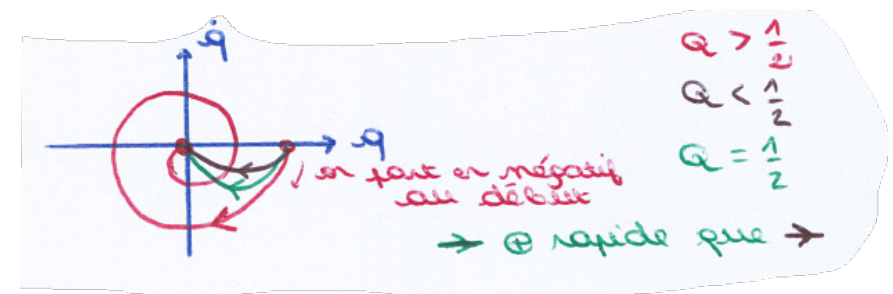


FIGURE 15 – Tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$ pour un signal $E(t)$ (bleu) carré compris entre +5 V et 0 V avec $\omega_0 = 10^4$ rad/s et $Q = 2.5$ (jaune), $Q = 0.5$ (vert) et $Q = 0.25$ (rouge).

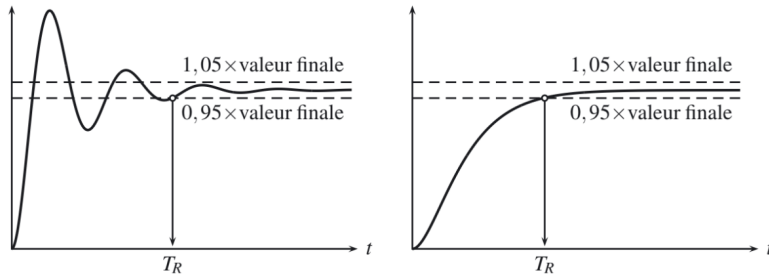
Exercice 14 ❤️

Tracer le portrait de phase des trois régimes pour la décharge.



3 - Temps de réponse

En plus des différentes constantes de temps déjà vues, on définit le *temps de réponse à 5%* comme étant la durée T_R au bout de laquelle le système atteint sa valeur finale à moins de 5% près.



Le temps de réponse T_R correspond à la durée du régime transitoire, et est calculable. Le graphe représenté Fig. 16 montre l'évolution du temps de réponse en fonction du facteur d'amortissement. On remarque qu'il y a un minimum, correspondant à un régime pseudo-périodique. En pratique, on fera en sorte que la période du créneau soit au moins le double de T_R .

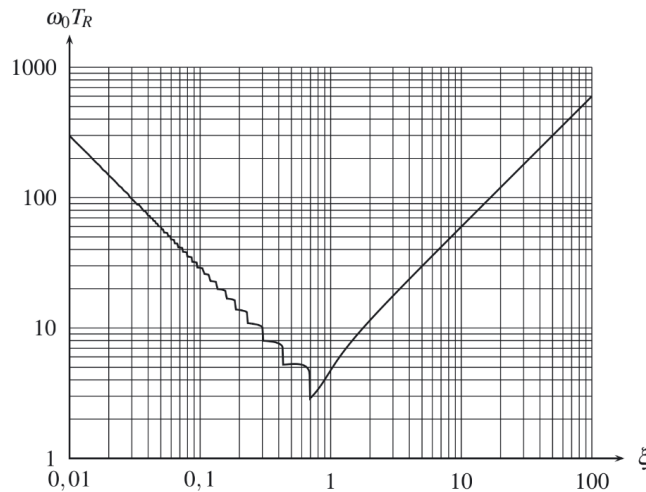


FIGURE 16 – Temps de réponse à 5% en fonction de ξ . Les coordonnées du minimum sont $(\xi = 0.69, \omega_0 T_R \approx 3)$.

Exercice 15 ⚡

- a) Soit $T = 2\pi/\omega$ la pseudo-période, et $T_0 = 2\pi/\omega_0$. A quoi correspond T_0 ? Calculer en fonction de L et de C la valeur maximale de R telle que :

$$\frac{T - T_0}{T_0} < 10^{-3}$$

Application numérique : $L = 1$ mH, $C = 1$ μ F. Commenter.

- b) Montrer que le facteur de qualité est une estimation du nombre d'oscillations du système avant d'atteindre la valeur finale.
c) Quel est le temps de réponse minimal pouvant être atteint avec $L = 1$ mH et $R = 10$ Ω ?

a) On a $\frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$. T_0 est la période lorsque $Q \rightarrow \infty$, i.e. quand on supprime tout effet dissipatif. On pose $\varepsilon = \frac{T - T_0}{T_0} \ll 1$, d'où $T < T_0(1 + \varepsilon)$. Avec quelques développements limités, on obtient :

$$R < \sqrt{\frac{8L\varepsilon}{C}} \approx 2.8\Omega$$

b) Les oscillations disparaissent (on s'écarte de moins de 5% de la valeur finale) après un temps $\tau \ln(20) \approx 3\tau = \frac{6Q}{\omega_0}$. Le nombre d'oscillations est donc donné par

$$\frac{3\tau}{T} \approx \frac{\omega}{\omega_0} Q \xrightarrow{Q \gg 1} Q$$

c) Le temps de réponse minimal est tel que $Q = \frac{1}{2\xi} = 1/1.38$ et $\omega_0 T_R \approx 3$.

$$T_R \approx \frac{3}{\omega_0} \approx 4.14 \frac{L}{R} = \dots$$

4 - Aspects énergétiques

Exercice 16 ♥

- a) Faire un bilan d'énergie du circuit RLC série.
- b) On se place de nouveau en *régime libre* (donc pas d'énergie injectée extérieurement dans le système) dans le cas d'un *amortissement très faible* (i.e. faible valeur de R , i.e. régime **pseudo-périodique**).
- i) Donner l'expression approchée de l'énergie stockée dans le circuit en fonction du temps.
- ii) Donner l'énergie perdue par l'oscillateur au cours d'une pseudo-période T . En déduire une interprétation énergétique du facteur de qualité Q dans le cas d'un amortissement très faible (et uniquement dans ce cas).

L'énergie devient donc :

$$E_{\text{stocké}} \simeq \frac{A^2}{2C} e^{-2t/\tau}$$

- b) ii) L'énergie stockée perdue pendant une pseudo-période est :

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{stocké}} &= E_{\text{stocké}}(t+T) - E_{\text{stocké}}(t) \\ &= E_{\text{stocké}}(t) (e^{-2T/\tau} - 1) \\ &\simeq E_{\text{stocké}}(t) \left(1 - \frac{2T}{\tau} - 1\right) \\ &= \frac{-A^2 T}{\tau C} e^{-2t/\tau} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{2T}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

- a) On multiplie la loi des mailles par l'intensité $i(t)$:

$$\underbrace{Ei}_{P_{GBF}} = u_c i + u_L i + u_R i = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right)}_{\mathcal{E}_{\text{cond}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)}_{\mathcal{E}_{\text{bob}}} + \underbrace{R i^2}_{P_J}$$

- b) i) On prend $q(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t)$. L'énergie stockée est donc :

$$\begin{aligned} E_{\text{stocké}}(t) &= \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2 \\ &= \frac{A^2}{2C} e^{-2t/\tau} \left[\cos^2(\omega t) + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\sin^2(\omega t) + \frac{\cos^2(\omega t)}{\omega \tau} + \frac{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\omega^2 \tau^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Dans le cas de faible amortissement ($Q \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} &= \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \rightarrow 1 \\ \omega \tau &= \sqrt{4Q^2 - 1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

VI Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

On s'intéresse désormais à la réponse d'un circuit électrique en *régime sinusoïdal forcé*, i.e. en présence d'une source délivrant un signal sinusoïdal. L'étude d'un système si particulier ouvre sur l'étude *fréquentielle* d'un circuit, complémentaire à son étude temporelle. En effet, tout signal d'excitation peut être décomposé en une somme de fonctions sinusoïdales (c'est la décomposition de Fourier). C'est une occasion d'aborder les notions de *résonance* et de *filtrage*.

1 - Notation complexe

Pour motiver l'étude de la notation complexe, reprenons l'exemple du circuit RL série, cette fois forcé par un générateur de tension sinusoïdale : $e(t) = u_0 \cos(\omega t)$. On rappelle l'équation sur $i(t)$ donnée directement par la loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = e(t) = e_0 \cos(\omega t)$$

La solution est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Nous avons déterminé précédemment la solution de l'équation homogène : elle correspond au régime libre (décharge de la bobine) et disparaît au bout de 5τ environ (ici, $\tau = L/R$). Dans ce chapitre, on sera surtout intéressé par le comportement en régime permanent, qui correspond à une solution particulière du système.

Cherchons une solution particulière de la forme $i_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. En injectant dans l'équation différentielle, il vient :

$$\begin{aligned} e_0 \cos(\omega t) &= L\omega(B \cos(\omega t) - A \sin(\omega t)) + R(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \\ &= \cos(\omega t) (AR + BL\omega) + \sin(\omega t) (BR - AL\omega) \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} AR + BL\omega = e_0 \\ BR - AL\omega = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} e_0 \\ B = \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} e_0 \end{cases}$$

Aux temps longs, le régime permanent du courant dans le circuit s'écrit donc :

$$i(t) = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} e_0 \cos(\omega t) + \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} e_0 \sin(\omega t)$$

La démarche employée ici est très générale, mais est fastidieuse et calculatoire.

Autre méthode plus simple (oubliez donc dès à présent tout ce qui précède) : on utilise le fait que les circuits sont linéaires, et on passe en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{u} &= \underline{U} e^{j\omega t} = U_0 e^{j(\omega t + \phi_u)} \\ \underline{i} &= \underline{I} e^{j\omega t} = I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)} \end{cases}$$

$\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont appelés amplitudes complexes, U_0 et I_0 sont appelés amplitudes réelles. On résout ainsi en complexe, puis on revient au signal de départ par : $u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t)) = U_0 \cos(\omega t + \phi_u)$ et $i(t) = \text{Re}(\underline{i}(t)) = I_0 \cos(\omega t + \phi_i)$.

Représentation complexe ♥

En notation complexes, les opérateurs dérivation et intégration deviennent :

	signaux réels	représentation complexe
Dérivation	$\frac{d}{dt}$	$*j\omega$
Intégration	$\int dt$	$*\frac{1}{j\omega}$

Ainsi l'équation différentielle du circuit RL s'écrit :

$$jL\omega \underline{i}(t) + R \underline{i}(t) = \underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t}$$

Remarque

Si la source est une fonction sinusoïdale, on a $\underline{e}(t) = ie_0 e^{j\omega t}$ (ou bien on prend $\underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t}$ et la solution est trouvée en prenant la partie imaginaire au lieu de la partie réelle).

Donc :

$$\underline{i}(t) = \frac{e_0/R}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}$$

Puis on obtient directement $i(t)$:

$$\begin{cases} I_0 = \left| \frac{e_0/R}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t} \right| = \frac{e_0/R}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \\ \phi_i = \arg(e_0/R) - \arg(1 + j\omega\tau) = -\arg(1 + j\omega\tau) = -\arctan(\omega\tau) \end{cases}$$

Ainsi $i(t) = \frac{e_0/R}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega\tau))$, et on obtient la solution trouvée précédemment après quelques réarrangements.

Définition ♥

Argument d'un nombre complexe $z = a + ib$:

Si $a > 0$ alors $\arg z = \arctan(b/a)$

Sinon ($a < 0$) $\arg z = \arctan(b/a) \pm \pi$

La notation complexe est en fait plus puissante que cela : elle permet de trouver directement la solution sans même passer par une équation différentielle, grâce à la définition de l'impédance complexe.

2 - Impédance d'un dipôle en RSF

On définit, en RSF, l'impédance complexe d'un dipôle comme le rapport entre la tension complexe et l'intensité complexe à ses bornes :

$$\underline{Z} = Z e^{j\phi} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U}{I} e^{j(\phi_u - \phi_i)}$$

L'argument ϕ de $\underline{Z}$ est égal au déphasage $\phi_u - \phi_i$ entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$, et Z le module de $\underline{Z}$ vaut le rapport des amplitudes de

$u(t)$ et $i(t)$. Ainsi, la connaissance de l'une des grandeurs $u(t)$ ou $i(t)$ et la connaissance de $\underline{Z}$ permet de déterminer l'autre grandeur.

Définition ♥

On pose $Z = R + jX$ et $Y = 1/Z = G + jB$:

- Z est appelée **impédance** (complexe), R **résistance** et X **réactance**. Ces trois quantités s'expriment dans le SI en ohms (Ω).
- Y est appelée **admittance** (complexe), G la **conductance** et B la **susceptance**. Ces trois quantités s'expriment en siemens ($S = \Omega^{-1}$).

Impédances complexes ♥

Résistance : $Z_R = R$

Bobine : $Z_L = jL\omega$

Condensateur : $Z_C = 1/jC\omega$

Exercice 17 ♥

- Démontrer les expressions de Z_R , Z_L et Z_C .
- Donner le comportement asymptotique d'une bobine et d'un condensateur

a) Résistance : $u = Ri$ donc $Z_R = R$.

Condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt} \sim jC\omega u_c$, donc $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$.

Bobine : $u_L = L \frac{di}{dt} \sim jL\omega i$ donc $Z_L = jL\omega$

b) A haute fréquence, $Z_C \rightarrow 0$ et $Z_L \rightarrow \infty$.

A basse fréquence, $Z_C \rightarrow \infty$ et $Z_L \rightarrow 0$.

Association de dipôles linéaires :

- association de n dipôles en série :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n$$

- association de n dipôles en parallèle :

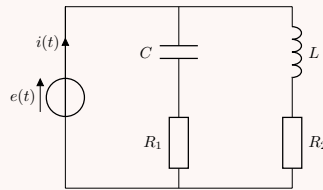
$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}$$

soit :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n$$

Exercice 18 ⚡

Courant et tension en phase. On considère le montage suivant en RSF.



Déterminer la pulsation ω à laquelle le courant $i(t)$ et la tension $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ sont en phase. À quelle condition sur les résistances cette pulsation existe-t-elle ? À quelle condition sur les résistances est-ce vérifié à toutes les fréquences ?

Le courant et la tension sont en phase si l'impédance équivalente au reste du circuit a un comportement purement résistif, ou encore si $\text{Im } Z_{\text{eq}} = 0$.

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{1}{jL\omega + R_2}} = \frac{(R_1 + \frac{1}{jC\omega})(R_2 + jL\omega)}{R_1 + R_2 + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Afin d'extraire la partie imaginaire, on multiplie en haut et en bas par le conjugué complexe du dénominateur (en prenant garde au fait que $\frac{1}{j} = -j$)

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{(R_1 + \frac{1}{jC\omega})(R_2 + jL\omega)(R_1 + R_2 - j(L\omega - \frac{1}{C\omega}))}{(R_1 + R_2)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

On demande que la partie imaginaire soit nulle, donc que

$$(R_1 + R_2) \left(LR_1\omega^2 - \frac{R_2}{C} \right) = \left(L\omega^2 - \frac{1}{C} \right) \left(R_1R_2 + \frac{L}{C} \right),$$

qui se simplifie en

$$L \left(R_1^2 - \frac{L}{C} \right) \omega^2 = \frac{R_2^2}{C} - \frac{L}{C^2}. \quad (\text{VI.1})$$

La pulsation à laquelle courant et tension sont en phase est donc

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{R_2^2 C^2}{LC} - 1}{R_1^2 C^2 - LC}}.$$

Cette solution est réelle si et seulement si numérateur et dénominateur sous la racine sont de même signe, ce qui peut se résumer par

$$R_1 - \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ et } R_2 - \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ doivent être de même signe}$$

Enfin, intensité et tension restent en phase à toutes les pulsations si on annule la dépendance en ω dans VI.1 en écrivant

$$R_1^2 - \frac{L}{C} = 0 \implies R_1 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Lois de Kirchhoff en RSF : Les lois de Kirchhoff (loi des noeuds, loi des mailles) continuent d'être vérifiées en RSF si l'on est toujours dans le cadre de l'ARQS. Elles peuvent se réécrire avec les amplitudes complexes :

- **Lois des noeuds :** * on note $i_k(t) = i_k^0 \cos(\omega t + \phi_k)$ et $\underline{i_k} = i_k^0 e^{j(\omega t + \phi_k)}$. On a la loi des noeuds

$$\sum_k \varepsilon_k i_k(t) = \sum_k \varepsilon_k i_k^0 \cos(\omega t + \phi_k) = 0$$

Maintenant (astuce) on se décale dans le temps d'une demi-période $T/2 = \pi/\omega$, et on a :

$$\sum_k \varepsilon_k i_k(t + \pi/\omega) = \sum_k \varepsilon_k i_k^0 \sin(\omega t + \phi_k) = 0$$

On obtient ainsi, par combinaison linéaire des deux équations précédentes :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i_k} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_k \varepsilon_k \underline{I_k} = 0} \quad \text{avec} \quad \underline{I_k} = i_k^0 e^{j\phi_k}$$

- **Lois des mailles :** même démarche que précédemment, on arrive à :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{U_k} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{U_k} = u_k^0 e^{j\phi_k}$$

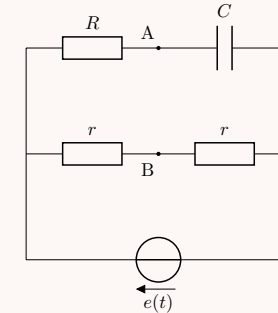
Attention

En revanche on ne peut pas dire ~~$\sum_k \varepsilon_k i_k^0 = 0$~~ ou ~~$\sum_k \varepsilon_k u_k^0 = 0$~~ .

*. C'est aussi une occasion pour resouligner l'importance du cadre de l'ARQS : on néglige les phénomènes de propagation, *i.e.* une modification de l'intensité à une extrémité d'un fil se transmet instantanément à l'autre extrémité.

Exercice 19 ♥

Circuit déphaseur. On considère le circuit suivant en RSF ($e(t) = e_m \cos(\omega t)$). On pose $V_A - V_B = u = U_m \cos(\omega t + \phi)$. Déterminer U_m et ϕ dans le cas où $R = r$.



On peut donc appliquer un pont diviseur de tension

$$\underline{V_B} = \frac{r}{r+r} e = \frac{e}{2} \quad \underline{V_A} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{r + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jrC\omega} e,$$

$$\underline{u} = \underline{V_A} - \underline{V_B} = \frac{e}{2} - \frac{e}{1 + jrC\omega} = \frac{e}{2} \frac{jrC\omega - 1}{jrC\omega + 1}$$

On en déduit les grandeurs réelles en calculant le module et la phase de $\underline{u}$

$$U_m = |\underline{u}| = \frac{e_m}{2} \quad \phi = \arg(\underline{u}) = \arg(jrC\omega - 1) - \arg(jrC\omega + 1)$$

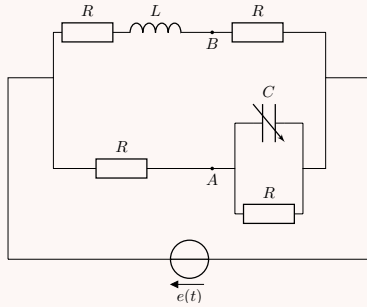
On sait que $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ et $\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, donc :

$$\phi = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(1 + jrC\omega) \right) = \pi - 2 \arctan(rC\omega)$$

Il s'agit d'un filtre dont le gain est constant, mais dont le déphasage varie avec la fréquence.

Exercice 20

Pont d'impédance. Le pont d'impédances représenté ci-dessous est dit équilibré lorsque $u_{AB} = 0$. Pour quelle valeur de C cet équilibre est-il réalisé ? Intérêt du montage ?



Comme dans l'exercice sur le déphaseur, on met la masse à droite du circuit. On peut alors calculer par un diviseur de tension les potentiels

$$\underline{V}_B = \frac{R}{2R + jL\omega} e \quad \underline{V}_A = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}} e = \frac{1}{2 + jRC\omega} e \quad (\text{VI.2})$$

Le pont est équilibré pour $V_A = V_B$, il faut donc passer aux modules

$$\frac{R^2}{4R^2 + L^2\omega^2} = \frac{1}{4 + R^2C^2\omega^2} \Leftrightarrow 4R^2 + R^4C^2\omega^2 = 4R^2 + L^2\omega^2, \quad (\text{VI.3})$$

ce qui se produit quand

$$C = \frac{L}{R^2} \quad (\text{VI.4})$$

Ce pont est appelé pont de Maxwell, il permet de déterminer facilement une inductance de valeur inconnue dès qu'on possède des résistances connues et une capacité variable. Par ailleurs, le fait d'être en régime variable permettra de mieux repérer la position exacte de l'annulation de $V_A - V_B$ (on peut changer ω avec le GBF pour vérifier que l'annulation persiste lorsqu'on pense avoir atteint la bonne valeur de C).

3 - Notion de résonance

Qu'est-ce qu'une résonance ? Même le *Dictionnaire de physique expérimentale*, de Taillet/Villain/Feuvre, une bonne référence *, peine à en donner une définition claire :

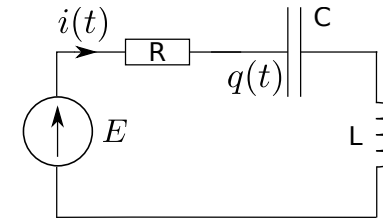
Définition ♥

« Situation très générale dans laquelle l'excitation périodique d'un système à une fréquence ω proche de ses fréquences propres ω_0 provoque une réponse de très forte amplitude. »

Mais que veut dire « très forte amplitude » ? Retenons simplement qu'il y a résonance lorsque la réponse d'un système à une excitation passe par un maximum lorsque l'on fait varier la fréquence. Le terme de *fréquence propre* présent dans la définition du *Dictionnaire de physique expérimentale* correspond à la fréquence des modes de vibration ou d'oscillation d'un système, *i.e.* les fréquences auxquelles le système a tendance à vibrer ou à osciller spontanément ou en réponse à une percussion : pour le RLC série, il s'agit de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ par exemple. Mais nous verrons aussi que la fréquence de résonance d'un système **n'est pas égale** à sa fréquence propre (mais reste proche)... En terme de transfert énergétique, la résonance correspond au cas où l'excitation tend à favoriser l'évolution que le système aurait tendance à avoir s'il était laissé libre (l'excitation est en effet dans ce cas là *en phase* avec cette évolution).

Ce concept de résonance est présent dans de très nombreux domaines de la physique : instruments de musique (à cordes et à vent, percussions), transitions atomiques, RMN, récepteurs radio,... et les circuits électriques nous permettent d'en dégager les caractéristiques principales. Nous l'aborderons par l'étude (classique !) du RLC, et nous nous intéresserons à deux types de résonance : résonance en **intensité** et résonance en **tension**.

On redonne le montage électrique du RLC série :



On considère une excitation sinusoïdale. Comme vu précédemment, la réponse à une telle excitation est la somme d'une fonction associée au régime transitoire (solution de l'équation homogène), et d'une fonction sinusoïdale (solution particulière), et aux temps longs, seule cette dernière subsiste. On se focalisera ainsi sur la solution particulière (associée au régime permanent), obtenue simplement grâce à la notation complexe des grandeurs électriques.

Application directe

Donner l'impédance équivalente du circuit.

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

*. Qui pourrait vous être utile le jour de l'oral lors du temps de préparation de votre leçon de physique !

Exercice 21 ❤️

Résonance en intensité. On considère le circuit RLC série précédent, avec $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$.

- Donner l'intensité complexe. Que vaut l'amplitude I de l'intensité? Le déphasage ϕ entre $i(t)$ et $e(t)$?
- Étudier les variations de I en fonction de ω . Quelle est sa valeur maximale? Existe-t-elle toujours?
- Tracer l'allure de ϕ . En déduire un moyen expérimental de trouver facilement la fréquence de résonance du RLC série.
- Donner l'intervalle de fréquence qui permet de vérifier :

$$|\underline{i}(\omega)| \geq i_{\max}/\sqrt{2}$$

(aussi appelé "bande passante à -3dB : pourquoi?"). En déduire un lien entre la largeur de la bande passante et le facteur de qualité Q dans le cadre du RLC série.

- La loi des mailles en RSF donne :

$$e = Z_{\text{eq}} i = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] i \iff i = \frac{e}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

On en déduit l'amplitude I et le déphasage ϕ :

$$I = |i| = \left| \frac{e}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} \right| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

$$\phi = \arg(i) = \arg(e) - \arg \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) = -\arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$$

A basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), on a $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $I \rightarrow 0$.

A haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), on a $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et $I \rightarrow 0$.

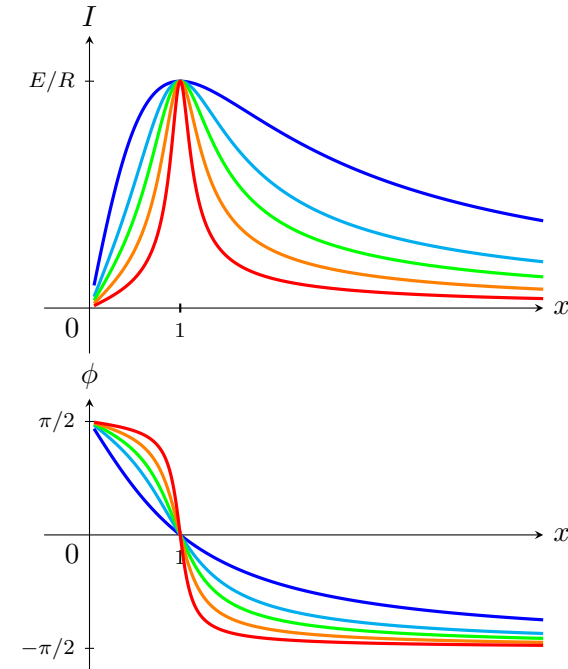


FIGURE 17 – Résonance en intensité pour différentes valeurs de Q : $Q = 0.5$, $Q = 1$, $Q = 1.5$, $Q = 2.5$, $Q = 5$

b) Le maximum de $I(\omega)$ est atteint lorsque le dénominateur est minimal, i.e. quand :

$$\frac{d}{d\omega} \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

On a alors :

$$\boxed{I(\omega_0) = I_{\max} = \frac{E}{R}}$$

La résonance existe peu importe la valeur de Q et à lieu à la pulsation propre ω_0 .

c) Il existe deux méthodes pour trouver ϕ . La première est de trouver le maximum de I . La deuxième est d'afficher $i(t)$ en fonction de $e(t)$ sur l'oscilloscope (mode XY) et chercher quand les deux sont en phase. A la résonance l'ellipse s'aplatit et on obtient une droite.

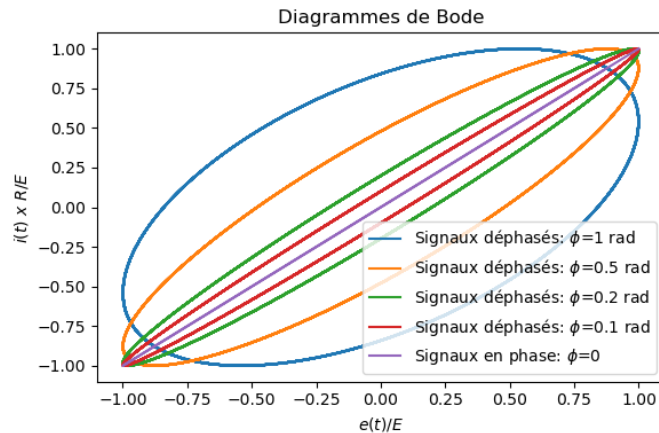


FIGURE 18 – Affichage en mode XY de la tension et du courant pour un circuit RLC série.

d) On calcule I en dB :

$$I_{\text{dB}} = 20 \log |I(\omega)| = 20 \log E - 10 \log \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right)$$

La bande-passante est définie comme l'intervalle en ω tel que $I \geq i_{\max}/\sqrt{2}$, soit :

$$\begin{aligned} I_{\text{dB}} &\geq 20 \log(i_{\max}) - 20 \log \sqrt{2} \\ &\geq 20 \log \frac{E}{R} - 3\text{dB} \end{aligned}$$

Dans notre cas, la basse passante est donnée par :

$$1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)^2 \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \leq 1$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Aux bornes de l'intervalle : $Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1 = \varepsilon$.

On a donc une équation d'ordre 2 à résoudre : $x^2 - \frac{\varepsilon}{Q}x - 1 = 0$, et on obtiens 4 solutions (deux par valeur de ε). On choisit les deux solutions positives :

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \quad x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

La bande passante à -3dB est donc :

$$\boxed{\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q}}$$

Le facteur de qualité est donc une mesure de la largeur de la résonance.

Exercice 22 ❤️

Résonance en tension. On étudie cette fois la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

- Donner $u_c(t)$ en fonction de e . Que vaut son amplitude U ? Son déphasage avec $e(t)$?
- Étudier les variations de U en fonction de ω . On distinguera deux cas possibles.

a) On obtient la tension aux bornes du condensateur avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_c = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

La partie réelle change de signe, donc on utilise l'astuce suivante pour le déphasage :

$$\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right) = \arg\left[j\left(-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] = \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{x}{Q} - j(1 - x^2)\right)$$

L'amplitude et le déphasage sont alors :

$$U = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \equiv \frac{E}{\sqrt{f(x)}} \quad \phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(Q \frac{1 - x^2}{x}\right)$$

On étudie les variations du dénominateur :

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{cases} \quad \text{si } Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$: si $x \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ alors $f'(x) \leq 0$ et si $x \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ alors $f'(x) \geq 0$. **Il y a donc résonance en $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.** Il faut également noter que la pulsation de résonance $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ est différente de la pseudo-pulsation en régime libre $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$!

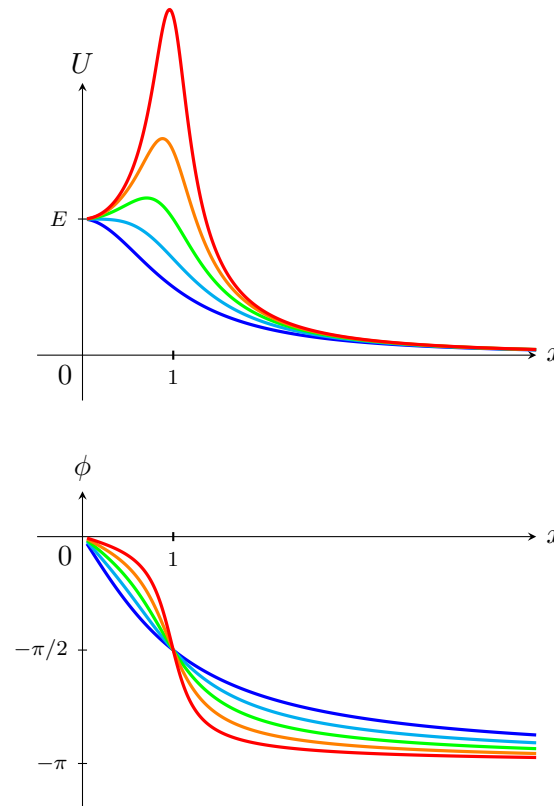


FIGURE 19 – Résonance en intensité pour différentes valeurs de Q : $Q = 0.5$, $Q = 1/\sqrt{2}$, $Q = 1$, $Q = 1.5$, $Q = 2.5$

Remarque

Le détail des calculs peut se trouver ici :

<https://www.physagreg.fr/electrocinetique-5-resonances-rlc-serie.php>

Attention

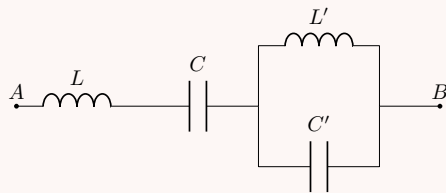
- Contrairement à l'intensité, **il n'existe pas toujours une résonance en tension !**
- La bande passante pour chaque type de résonance est différente ! (On ne l'a pas calculée pour la tension, car le calcul est un peu plus barbare... mais les deux bandes passantes sont quasi-identiques aux amortissements faibles)
- La pulsation de résonance est différente dans chaque cas : ω_0 pour la résonance en $i(t)$ et $\omega_0\sqrt{1-1/2Q^2}$ pour la résonance en $u(t)$ (à ne pas confondre avec la pseudo-pulsation du régime libre : $\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}$!)

Remarque

Encore une fois, ces considérations sont très générales. On retrouve les mêmes phénomènes de résonance en mécanique pour l'oscillateur harmonique amorti ($u(t)$ analogue à $x(t)$, $i(t)$ analogue à $v(t)$), et vous modéliserez en TP la résonance d'un diapason par une résonance en tension.

Exercice 23 ⚡

Résonance et anti-résonance. Donner qualitativement l'allure des variations avec la fréquence du module de l'impédance du dipôle suivant (pour simplifier, $L' = L$ et $C' = C$) :



Que se passe-t-il si on tient compte des résistances internes des composants ?

L'impédance équivalente de ce dipôle est purement imaginaire, elle s'écrit

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} \\ &= j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C\omega - \frac{1}{L\omega}} \right) \\ &= jL\omega \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right) \\ &= jL\omega_0 \times x \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right) \end{aligned}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $x = \omega/\omega_0$.

L'impédance tend vers l'infini (résonance) pour $\omega = \omega_0$, et pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$. Par ailleurs, on observe deux lieux d'antirésonance où la valeur de l'impédance s'annule. Si on prend en compte la résistance interne des composants, la forme globale de la courbe est inchangée, par contre la résonance n'est plus infinie, et aux antirésonances l'impédance ne s'annule plus (mais reste minimale).

4 - Puissance en RSF

Nous avons défini la puissance dans la première partie du cours, et nous avons déjà pu calculer la puissance reçue par un dipôle en régime alternatif et dont la tension et l'intensité sont déphasés de ϕ : la puissance moyenne est $\bar{P} = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos(\phi)$.

Attention

La puissance est non-linéaire (produit de $u(t)$ et $i(t)$) ainsi il faut prendre ses précautions lorsqu'on utilise la notation complexe ! Soit on moyenne des quantités réelles ($u(t)$ et $i(t)$), soit on passe par la notation complexe, et la puissance moyenne est alors donnée par

$$\bar{P} = \langle u(t)i(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(t)\underline{i}(t)^*)$$

(où $\underline{i}(t)^*$ est le conjugué de $\underline{i}(t)$) et non par $\bar{P} = \text{Re}(\underline{u}(t)\underline{i}(t))$ ou, pire, par $\bar{P} = \text{Re}(\underline{u}(t))\text{Re}(\underline{i}(t))$! On pourra s'assurer que l'on retrouve bien $\bar{P} = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos(\phi)$.

Le coefficient $\cos(\phi)$ est le *facteur de puissance* : il faut 1 pour une résistance (déphasage nul entre $u(t)$ et $i(t)$) et vaut 0 pour un condensateur ou une bobine (courant et tension en quadrature de phase : on parle de dipôles purement *réactifs*, par opposition aux dipôles *résistifs*, qui, en moyenne, ne consomme donc rien au réseau !). On peut aussi, en écrivant $\underline{Z} = R(\omega) + jX(\omega)$ (R et X sont la *résistance* et la *réactance* du dipôle) exprimer le *facteur de puissance* comme $\cos(\phi) = R(\omega)/|\underline{Z}|$. Ainsi, il faut que $\underline{Z}$ soit purement réel pour avoir un *facteur de puissance* égal à 1. Et un fournisseur d'électricité a intérêt à ce que le facteur de puissance des installations qu'il fournit soit le plus proche possible de 1 : en effet, il fournit la puissance $P_f = P_c + Ri_{\text{eff}}^2$ avec $P_c = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos(\phi)$ la puissance consommée par un particulier par exemple. On peut alors calculer le rendement :

$$\eta = \frac{P_c}{P_c + Ri_{\text{eff}}^2} = \frac{P_c}{P_c + \frac{RP_c^2}{u_{\text{eff}}^2 \cos^2(\phi)}}$$

A P_c fixé (les besoins du consommateur sont fixés) on maximise le rendement en augmentant u_{eff} (d'où les lignes hautes tension), en minimisant R et en maximisant le *facteur de puissance* ! Le facteur de puissance d'une installation peut être *relevé* par modification de l'installation électrique. On en voit un exemple dans l'exercice suivant.

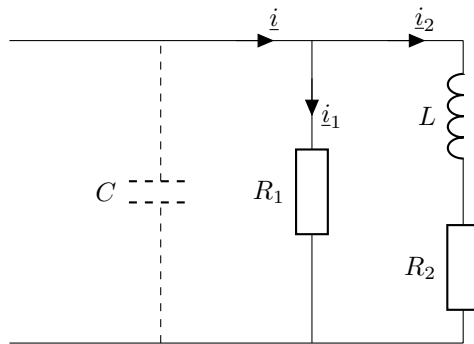
Exercice 24 ⚡

Relèvement d'un facteur de puissance. Un abonné à l'électricité dispose d'une source de tension sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $U = 220$ V. Il branche un appareil de chauffage (purement résistif) de puissance $P_1 = 1000$ W, et un moteur (présentant un comportement inductif) consommant une puissance $P_2 = 2000$ W, de facteur de puissance $\cos \phi_2 = 0.5$. Le moteur est modélisable par une bobine idéale et un conducteur ohmique placés en série.

- Déterminer les valeurs efficaces des intensités dans les deux dérivations ainsi que dans la ligne d'alimentation. En déduire le facteur de puissance de l'installation.
- Afin de contrebalancer l'effet inductif du moteur, on ajoute en parallèle un condensateur. Pour quelle valeur de sa capacité C permet d'obtenir un facteur de puissance de 1 ?

a) Dans le chauffage, le $\cos \phi$ vaut 1, donc $P_1 = U_{eff} I_1$ d'où $I_1 = 4,5$ A. Dans le moteur, on a $P_2 = U_{eff} I_2 \cos \phi_2$, d'où $I_2 = 18.2$ A. En RSF, les amplitudes complexes s'ajoutent, on a donc

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 \Rightarrow \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \Rightarrow I\sqrt{2}e^{j\phi} = I_1\sqrt{2} + I_2\sqrt{2}e^{j\phi_2}.$$



On a donc l'équation suivante :

$$Ie^{j\phi} = I_1 + I_2e^{j\phi_2} \quad Ie^{-j\phi} = I_1 + I_2e^{-j\phi_2},$$

En calculant le carré du module de l'équation précédente, on obtient (en notant que $e^{j\phi_2} + e^{-j\phi_2} = 2 \cos \phi_2$)

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \phi_2 \Rightarrow I = 20,8 \text{ A.}$$

Enfin,

$$P = P_1 + P_2 = U_{eff} I \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{P_1 + P_2}{U_{eff} I} \approx 0,65$$

b) En ajoutant un condensateur en parallèle, l'admittance totale du circuit s'écrit

$$\underline{Y}_{eq} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega + R_2} + \frac{1}{R_1} = \left[\frac{R_2}{L^2\omega^2 + R_2^2} + \frac{1}{R_1} \right] + j \left[C\omega - \frac{L\omega}{L^2\omega^2 + R_2^2} \right].$$

Afin que le facteur de puissance soit ramené à 1, on veut que

$$\text{Im}(\underline{Y}_{eq}) = 0 \Leftrightarrow C\omega = \frac{L\omega}{L^2\omega^2 + R_2^2} \Rightarrow C = \frac{L}{L^2\omega^2 + R_2^2}$$

Il nous faut donc les valeurs de L et R_2 . On connaît le facteur de puissance du moteur, et l'impédance du moteur s'écrit

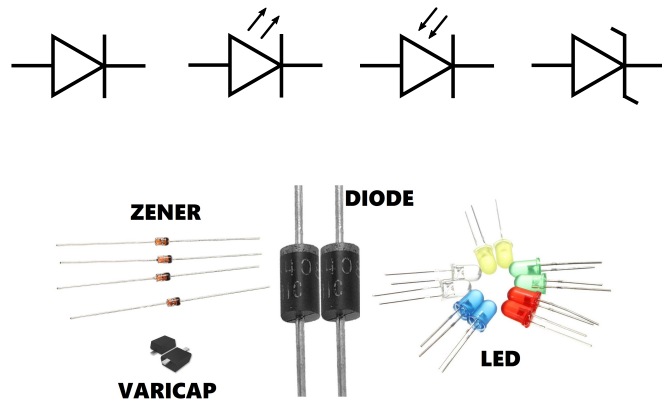
$$\underline{Z}_M = R_2 + jL\omega = \frac{U}{I_2}e^{j\phi_2},$$

d'où on tire $R_2 = \frac{U}{I_2} \cos \phi_2 \approx 6 \Omega$ et $L = \frac{1}{\omega} \frac{U}{I_2} \sin \phi_2 \approx 33 \text{ mH}$. Finalement, $C = 220 \mu\text{F}$.

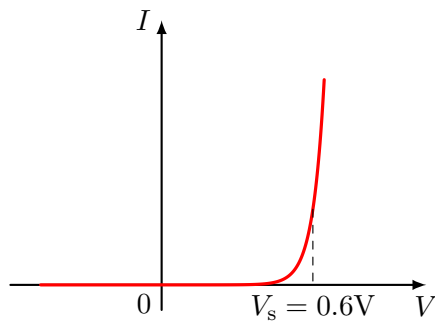
VII Composants non-linéaires

1 - Diodes

Une diode est un composant semi-conducteur qui constitue un dipôle passif non-linéaire, non-symétrique. On rencontre également des diodes électroluminescentes (DEL), des photodiodes et des diodes Zener. Ces quatre composants sont représentés ci-dessous :



La diode agit comme un commutateur de courant à sens unique. La caractéristique d'une diode est la suivante :



Loi de Schokley

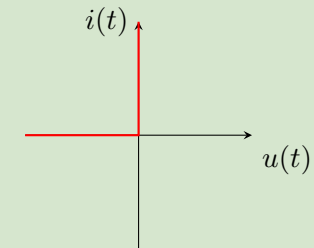
Dans le modèle de la jonction PN, la caractéristique courant-tension d'une diode est donnée par la loi de Schokley :

$$i = I_S \left(e^{\frac{eu}{k_B T}} - 1 \right) \quad (\text{VII.1})$$

avec $I_S \approx 10^{-14}\text{A}$ le courant de saturation et T la température. Pour $T = 300\text{K}$, on a $V_T = k_B T / e = 25.9\text{mV}$.

Modèle de la diode idéale ♥

$$\begin{cases} u < 0 \Rightarrow i = 0 \\ i > 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$



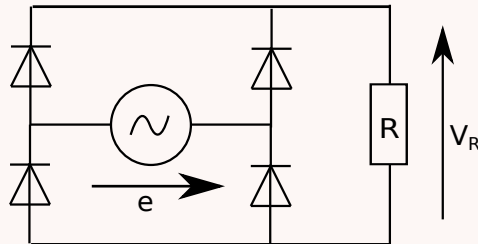
Autrement dit, dans un sens (du courant), la diode est équivalente à un fil, et dans l'autre sens à un interrupteur ouvert. On ajoute parfois un seuil de 0.6V pour laisser passer le courant.

Il existe une multitude d'autres diodes de conceptions et d'usages différents :

- Les diodes de redressement et de détection : jonction PN, diodes Schottky
- Les diodes à capacité variable : diodes varicap
- Les diodes de régulation : diodes Zener
- Les diodes électroluminescentes : LED (Light Emitting Diode)
- Les photodiodes
- Les diodes laser
- Les diodes à effet tunnel
- ...

Exercice 25 ❤️

Redressement double alternance^a. On considère le montage électrique suivant :



La tension $e(t)$ varie de manière sinusoïdale, d'amplitude 2 V et de fréquence 50 Hz. On suppose que les diodes sont idéales.

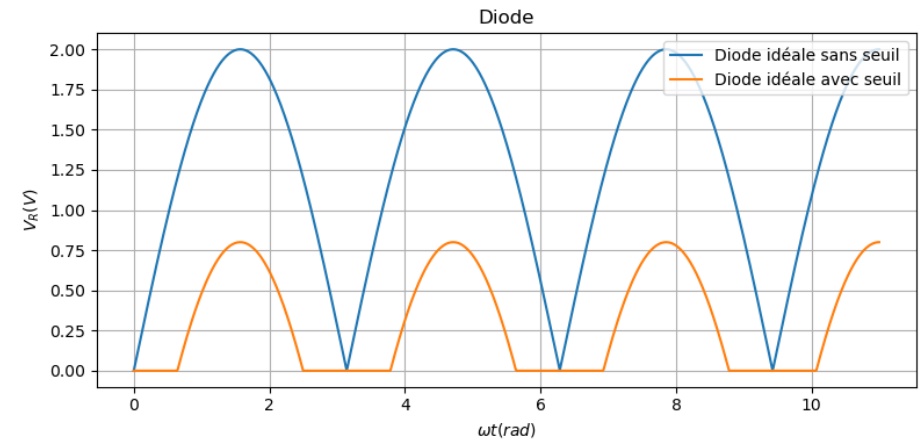
- Tracer le chemin (orienté) du courant électrique lorsque $e(t) > 0$ et $e(t) < 0$.
- Donner l'allure de $V_R(t)$.
- On suppose maintenant que les diodes ont une tension seuil $V_d = 0.6$ V (diodes non idéales). Donner l'allure de $V_s(t)$ dans ce cas-ci.

a. Remarque : Le montage étudié ici est utilisé pour transformer une tension alternative en tension continue : la moyenne du signal obtenu après redressement (non nulle) est récupérée à l'aide d'un filtre passe-bas, puis stabilisé par une diode Zener, puis un transistor permet de fournir une puissance suffisante. Une maquette de démonstration de la conversion alternatif-continu est disponible à Montrouge.

a) Pour $e(t) > 0$, le courant passe par la diode en bas à gauche puis en haut à droite. Pour $e(t) < 0$, le courant passe par la diode en bas à droite puis en haut à gauche.

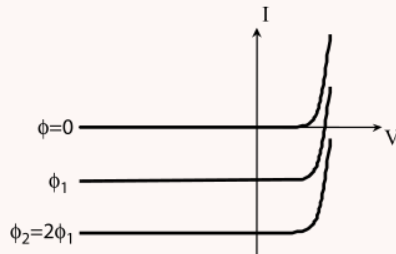
b) La tension V_R est la valeur absolue du signal $e(t)$.

c) Voir le graphe.



Exercice 26 ❤️

Photodiode. Une photodiode est un composant semi-conducteur capable de convertir la lumière en courant électrique : ce sont des diodes, qui disposent d'une zone pouvant être atteinte directement par la lumière. ^a Sous l'effet d'un flux lumineux Φ , leur caractéristique est donnée par :



Remarque : même quand elles ne sont pas illuminées ($\Phi = 0$), un très faible courant les traverse, appelé *courant d'obscurité*, de l'ordre de 1 nA.

- Donner le montage électrique permettant d'effectuer le tracé de la caractéristique de la photodiode
- Donner le montage électrique permettant d'utiliser la photodiode comme détecteur **linéaire** de la lumière (on utilisera une alimentation continue et une résistance R). Comment faut-il choisir la résistance R ?

^a. **Remarque :** Les cellules photovoltaïques traditionnelles sont simplement des photodiodes de très grande surface.

a) Il y a plusieurs possibilités pour tracer la caractéristique d'une photodiode. La première est d'utiliser un ampèremètre et un voltmètre, et de faire un montage en courte ou longue dérivation. On peut également décider d'utiliser un GBF et d'afficher directement la tension à l'oscilloscope. Pour obtenir le courant on remplace l'ampèremètre par une résistance dont on mesure la tension. Il y a cependant un problème de masse si on veut mesurer les deux tensions à l'oscilloscope. La solution est d'ajouter un transformateur d'isolement pour obtenir deux circuits indépendants (l'un avec le GBF, l'autre avec photodiode et résistance) et placer deux masses.

b) Le montage le plus simple auquel on pourrait penser consiste à brancher en série la photodiode et la résistance pour mesurer le point de fonctionnement. Cependant, celui-ci se trouve dans la partie "coudée" de la courbe, la mesure de luminosité n'est donc pas obtenue par une relation linéaire. Il s'agit d'un montage de **photodiode non polarisée**.

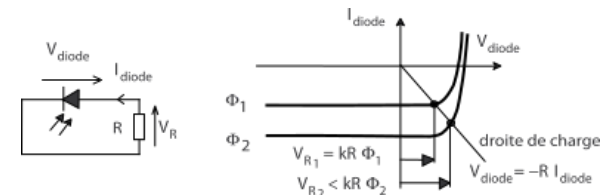


FIGURE 20 – Photodiode non polarisée

On préférera un montage de **photodiode polarisée en inverse** en ajoutant une alimentation continue. Le point de fonctionnement se trouve alors dans la zone de tension constante, cette tension étant proportionnelle au flux lumineux reçu. Pour être sûr de rester sur la plage de linéarité, on prendra R petit. En pratique, $R \simeq E/I_{\max}$ permet d'avoir un comportement linéaire et des signaux forts.

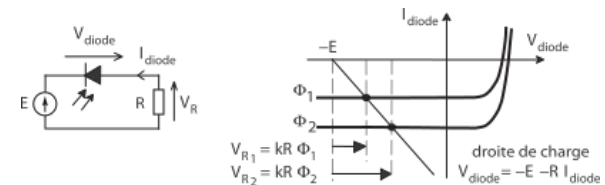


FIGURE 21 – Photodiode polarisée en inverse

2 - Amplificateur linéaire intégré (ALI)

Anciennement appelés amplificateurs opérationnels (AO), ils ont officiellement disparu des programmes de PCSI, mais il n'est pas inutile d'en connaître le fonctionnement (souvent retrouvés dans les annales).

L'ALI est un composant électronique de base extrêmement important. Il est très utilisé parce qu'il permet de réaliser simplement des fonctions non-linéaires variées et performantes. Un ALI est un composant actif qui doit être alimenté par une source extérieure (alimentation continu $+15\text{V}/-15\text{V}$ par exemple). Il possède au total 8 broches : 2 bornes d'alimentation ($\pm 15\text{V}$ par exemple), 2 bornes de réglage d'offset, 2 entrées (une inverseuse notée "-" et une non-inverseuse notée "+"), une sortie, et une borne non connectée.

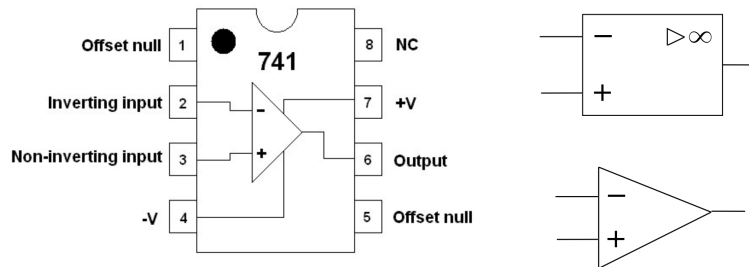
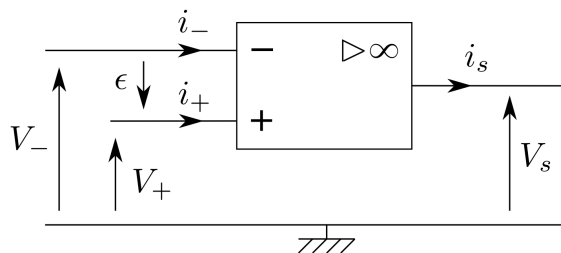


FIGURE 22 – Gauche : Schéma d'un ALI $\mu\text{A}741$, utilisé en TP. Droite : représentation symbolique d'un ALI (convention européenne en haut et américaine en bas).

Seules les entrées inverseuse et non-inverseuse ainsi que la sortie sont généralement représentées. Pour la suite, on prendra les conventions de notation suivantes :



Caractéristique de l'ALI

On note $\epsilon = v_+ - v_-$. Comme son nom l'indique, l'ALI est un amplificateur de la tension d'entrée. Il renvoie en effet en sortie une tension :

$$V_s = \mu_0 (V_+ - V_-) = \mu_0 \epsilon$$

Modèle de l'ALI idéal ♥

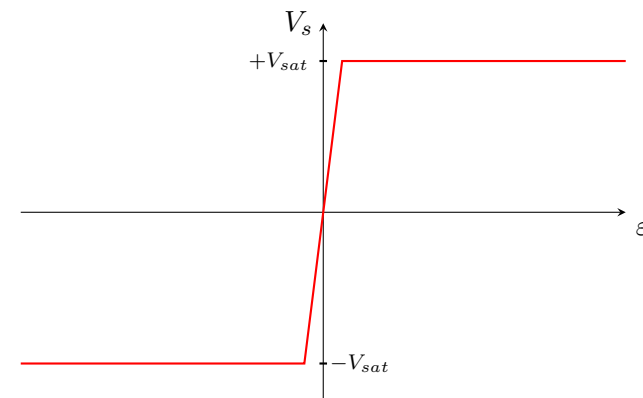
Le modèle consiste à supposer que :

- (i) Gain : $\mu_0 = \infty$
- (ii) Impédance d'entrée infinie : $i_+ = i_- = 0$
- (iii) Impédance de sortie nulle : source de tension idéale en sortie

Ce système ne consomme pas de puissance en entrée et fournit la puissance demandée en sortie*.

Dans le cadre de ce modèle, l'ALI peut fonctionner selon deux régimes :

- Le régime **linéaire** dans lequel $\epsilon = 0$, c'est-à-dire $V_+ = V_-$. C'est le régime le plus couramment observé.
- Le régime **saturé** pour lequel : si $\epsilon > 0$ alors $V_s = +V_{sat}$, et si $\epsilon < 0$ alors $V_s = -V_{sat}$. En général V_{sat} est très légèrement inférieur à la tension d'alimentation. Le régime saturé est en général observé lorsqu'on impose une différence de potentiel ϵ non nulle.



*. C'est pourquoi il est nécessaire de l'alimenter avec un générateur externe au circuit !

Voici quelques exemples de montages à base d'ALI que vous pourrez rencontrer en TP. Parmi ces ALI, tous fonctionnent en régime linéaire **sauf** le comparateur de tension.

Exercice 27

Retrouver les relations entre $s(t)$ et $e(t)$ pour les différents montages à base d'ALI présenté précédemment.
Quel est l'intérêt du montage suiveur ?

Pour calculer les relations entrée-sortie de montages avec des ALI en fonctionnement linéaire, le principe est souvent le même :

- Appliquer les hypothèses de l'ALI idéal : $V_+ = V_-$, $i_+ = i_- = 0$
- Appliquer la loi des noeuds sur l'entrée de l'ALI
- Appliquer la loi des mailles sur la maille formée par la tension d'alimentation et l'entrée de l'ALI
- Appliquer la loi des mailles sur la maille formée par la boucle de rétroaction, l'entrée et la sortie de l'ALI
- Combiner les différentes équations

L'intérêt du montage suiveur vient du fait que le courant d'entrée de l'ALI est nul : il n'y a pas de fuites de courant. On peut donc réaliser des mesures de tension sans influencer sur le circuit mesuré. Par exemple on peut mesurer la charge d'un condensateur sans que celui-ci ne se décharge dans la résistance interne du voltmètre.

Montage amplificateur inverseur $\frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1}$	Montage amplificateur non inverseur $\frac{s}{e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$
Montage suiveur $s = e$	Montage soustracteur $s = e_2 - e_1$
Montage à résistance négative $e = -R_p i$	Comparateur de tension $s = +V_{\text{sat}} \text{ si } e > V_{\text{ref}}$ $s = -V_{\text{sat}} \text{ sinon}$

Les ALI sont réalisés à partir d'un assemblage assez complexe de résistances et de transistors. La structure interne du $\mu A741$ (très répandu et utilisé en TP) est reproduite sur la figure (23). Les performances des ALI dépendent fortement de la qualité des transistors d'entrée, qui sont bipolaires pour le $\mu A741$ et à effet de champ pour le TL081 (également utilisé en TP). Les transistors à effet de champ étant de meilleure qualité que les transistors bipolaires, on utilise préférentiellement le $\mu A741$ pour mettre en avant les limitations des ALI, et le TL081 pour les mettre en avant leurs performances.

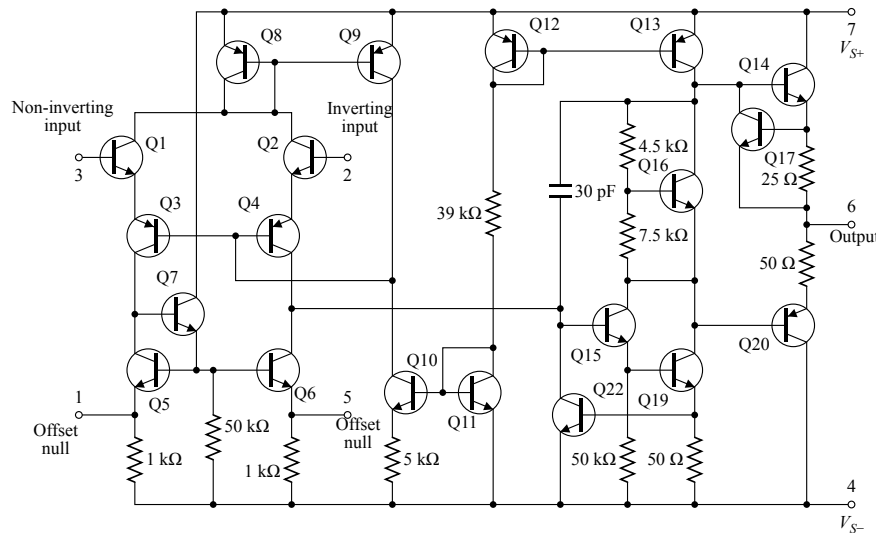


FIGURE 23 – Structure interne d'un ALI $\mu A741$.

Le modèle de l'ALI idéal n'étant évidemment pas vérifié dans le monde réel, on peut lister les principales limitations des ALI.

Limites de l'ALI

- **Limitation en tension de sortie** : $|s| < V_{sat}$, la valeur de saturation étant fixée par l'alimentation continue de l'ALI. De plus, μ_0 n'est pas infini (même s'il reste très grand).
- **Limitation en courant de sortie** : $|i_s| < i_{sat}$.
Pour le $\mu A741$, on a $i_{sat} \sim 10mA$.
- **Résistances d'entrée et de sortie** : $R_e < \infty$ et $R_s > 0$.
Ainsi, les courants d'entrée ne sont pas strictement nuls.
- **Vitesse de balayage** : $\left| \frac{ds}{dt} \right| < \sigma \simeq 1V/\mu s$.
A haute fréquence, un signal sinusoïdal apparaîtra triangulaire.

Caractéristique	Idéal	$\mu A741$	TL081
Paramètres linéaires			
Gain μ_0	∞	2×10^5	2×10^5
Résistance d'entrée R_e	∞	$2 \times 10^6 \Omega$	$10^{12} \Omega$
Résistance de sortie R_s	0Ω	100Ω	100Ω
Courant de polarisation d'entrée $(i_+ + i_-)/2$	$0 A$	$80 nA$	$30 pA$
Tension de décalage (offset) V_d	$0 V$	$1 mV$	$3 mV$
Paramètres non-linéaires			
Tension maximum de sortie	V_{cc}	$15 V$	$15 V$
Courant maximum de sortie	∞	$10 mA$	$10 mA$
Vitesse de balayage σ	∞	$0.5 V/\mu s$	$13 V/\mu s$

TABLE 1 – Caractéristiques approximatives réelles des amplificateurs linéaires intégrés courants. Ces valeurs peuvent varier d'un composant à l'autre dans une même série. Source : cours de Jérémy Neveu.

VIII Filtrage analogique

L'étude que nous venons de faire du régime sinusoïdal forcé nous conduit à une étude beaucoup plus générale : celle de l'analyse spectrale d'un signal. Nous nous intéresserons dans cette section au traitement **analogique** du signal, *i.e.* par le biais de filtres (linéaires) analogiques.

1 - Analyse de Fourier et représentation spectrale d'un signal

Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français du début du 19^{ème} siècle (1768-1830). Il a conduit des études sur la propagation de la chaleur, et est à l'origine de la décomposition des fonctions périodiques en séries trigonométriques :

Série de Fourier ♥

Un signal $s(t)$ périodique de période $T = 2\pi/\omega$ peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés *coefficients de Fourier* ; d'autre part on a $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (et $\tan(\phi_n) = b_n/a_n$). L'ensemble des coefficients c_n est appelé *spectre (discret) du signal $s(t)$* .

Si on veut être rigoureux, il faut préciser que $s(t)$ est une fonction est à valeurs réelles et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais en pratique c'est toujours le cas...*

Remarque

La détermination des coefficients de Fourier pour une fonction donnée n'est pas au programme de l'agrégation.

Quelques propriétés (à savoir démontrer) : ♥

- **Égalité de Parseval** : la valeur efficace de $s^2(t)$ vérifie :

$$\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^2 + b_n^2] = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

- Si $s(t)$ est **paire** : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$
- Si $s(t)$ est **impaire** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$

Remarque

Une fonction $s(t)$ *a priori* quelconque (c'est-à-dire potentiellement apériodique) peut également être décomposée, mais la décomposition de Fourier fait intervenir une somme *continue* d'harmoniques.

Éléments de démonstration :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t)^2 dt = \frac{1}{2}$$

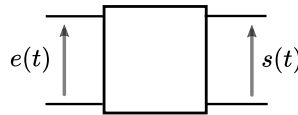
$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(n\omega t)^2 dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$$

*. C'est le *théorème des fonctions gentilles* !

2 - Notion de filtre

Ainsi, un signal périodique peut être caractérisé par son *spectre de Fourier* (i.e. l'ensemble des coefficients c_n). Peut-on, à l'aide d'un circuit électronique, modifier ce spectre, voir supprimer certaines composantes ? C'est ce que font les filtres, que l'on peut définir comme « *tout dispositif modifiant à dessein le spectre d'un signal d'entrée* ». Un filtre est donc, comme le montre le schéma suivant, un quadripôle qui, à partir d'un signal d'entrée, délivre le signal de sortie *filtré* :



Définition ♥

Un filtre est dit **linéaire** si les grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ sont reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$A_0 s(t) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{d^k s}{dt^k} = B_0 e(t) + \sum_{i=1}^m B_i \frac{d^i e}{dt^i}$$

L'ordre du filtre est donné par $\max(m, n)$.

Remarque

L'ordre d'un filtre est majoré par le nombre de condensateurs et de bobines du circuit.

Non-linéarité

Par quoi peut être caractérisé un système **non-linéaire** ?

- Réponse non pas proportionnelle à l'excitation
- Signal de fréquence $f \rightarrow$ signal de fréquence $f' \neq f$
- Spectre borné continu en entrée $\rightarrow$ nouvelles fréquences en sortie
- Bifurcations, ralentissement critique, saturation, transition vers le chaos ...

Dans la suite, on ne considérera que des filtres linéaires, et on se placera en régime permanent (et plus précisément en RSF).

Méthode pour le signal de sortie d'un filtre à partir du signal d'entrée : c'est là qu'intervient la décomposition de Fourier introduite précédemment. On décompose $e(t)$ en ses harmoniques, on regarde la réponse du filtre pour chacune de ces harmoniques, et on somme toutes ces réponses individuelles pour retrouver $s(t)$. Ainsi, l'étude du comportement d'un filtre se résume à déterminer sa réponse pour une grandeur d'entrée *sinusoïdale*, autrement dit, si on connaît la réponse du filtre pour une signal d'entrée harmonique $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$ pour toute pulsation ω , on connaît sa réponse pour un signal quelconque $e(t)$!

Prenons donc $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$. En notation complexe, la réponse est donnée en complexe par la relation :

$$\left(\sum_{i=0}^m A_k(j\omega)^k \right) \underline{s} = \left(\sum_{i=0}^n B_i(j\omega)^i \right) \underline{e}$$

Définition ♥

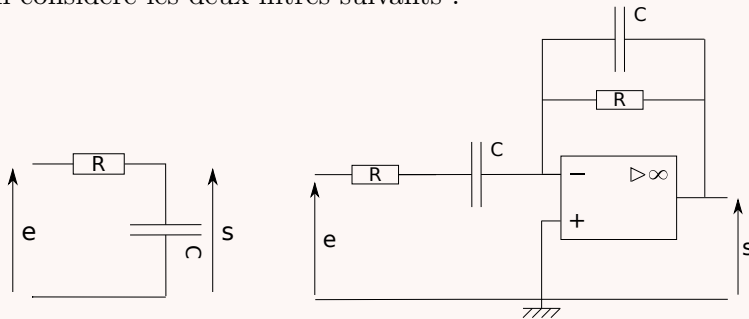
On définit alors la **fonction de transfert** du filtre comme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{k=0}^m A_k(j\omega)^k}{\sum_{i=0}^n B_i(j\omega)^i}$$

Tout le comportement du filtre est encodé dans $\underline{H}(j\omega)$: la donnée de $\underline{H}(j\omega)$ pour toute pulsation ω et de la grandeur d'entrée (quelconque) $e(t)$ permet de remonter à $s(t)$.

Exercice 28 ❤️

On considère les deux filtres suivants :



Donner la fonction de transfert associée à chaque filtre.

Pour le filtre de gauche :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jx}$$

avec $\tau = RC$ et $x = \omega\tau$.

Pour le filtre de droite :

On note Z_1 l'impédance équivalente du RC série et Z_2 celle du RC parallèle. La loi des mailles et le modèle de l'ALI idéal donnent :

$$V_+ = V_- = 0 \quad v_- + Z_1 i = e \quad s + Z_2 i = V_-$$

Donc :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} &= \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{-1}{Z_1 Y_2} = \frac{-1}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} \\ &= \frac{-1}{2 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

avec $\tau = RC$ et $x = \omega\tau$.

3 - Diagramme de Bode**Définition** ❤️

Pour faire l'étude du comportement du filtre en fonction de ω , on peut avoir recours au **diagramme de Bode** du filtre : il s'agit de la représentation graphique de la fonction de transfert. Il se compose de deux courbes :

- la **courbe de gain** représente $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de $\log(\omega)$ (G_{dB} s'exprime en décibel, les échelles verticales et horizontales sont logarithmiques).
- la **courbe de phase** représente $\phi = \arg(\underline{H}(j\omega))$ en fonction de $\log(\omega)$ (remarque : ϕ est le déphasage entre $s(t)$ et $e(t)$ lorsque $e(t)$ est une fonction harmonique à la pulsation ω).

Remarque

Une multiplication de la fonction de transfert par 10 correspond à une augmentation de G_{dB} de 20dB.

Methode

Pour tracer le diagramme de Bode d'un filtre on procédera toujours dans l'ordre qui suit :

- Analyse du comportement en HF et BF, prévision du type de filtre
- Calcul de la fonction de transfert
- Comportement asymptotique (+ vérification avec la prévision) et tracé des asymptotes
- Tracé du diagramme de Bode (en s'aidant de points particuliers, comme la valeur de G_{dB} et ϕ à la pulsation de résonance du système).

Exercice 29 ❤️

- a) Tracer le diagramme de Bode du filtre d'ordre 1 étudié dans l'exercice précédent.
- b) Soit un filtre dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jx/Q + (jx)^2}$$

- (i) Donner un exemple de système (déjà vu) dont la fonction de transfert peut s'écrire sous cette forme.
- (ii) Tracer le diagramme de Bode du filtre.
- (iii) Montrer que le gain présente une résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$, et donner la pulsation ω_r associée en fonction de ω_0 et Q .
- (iv) Montrer que le gain maximum à la résonance est :

$$G_{\max} = |H_0| \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Quelle précaution faut-il alors prendre lors de la manipulation d'un circuit RLC série ?

- c) Mettre la fonction de transfert du filtre d'ordre 2 de l'exercice précédent sous la forme :

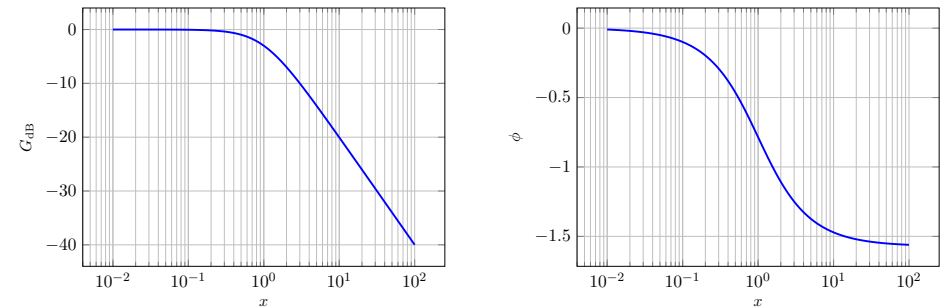
$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{jx/Q}{1 + jx/Q + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

et tracer de manière générale le diagramme de Bode d'un filtre dont la fonction de transfert peut s'écrire sous cette forme. Donner un exemple déjà vu de système dont la fonction de transfert s'écrit sous cette forme.

a) La fonction transfert est : $\underline{H} = \frac{1}{1+jx}$ avec $x = RC\omega$.

A basse fréquence : $\underline{H} \approx 1$, donc $G_{\text{dB}} = 20 \log|\underline{H}| \approx 0$ et $\phi = \arg \underline{H} \approx 0$

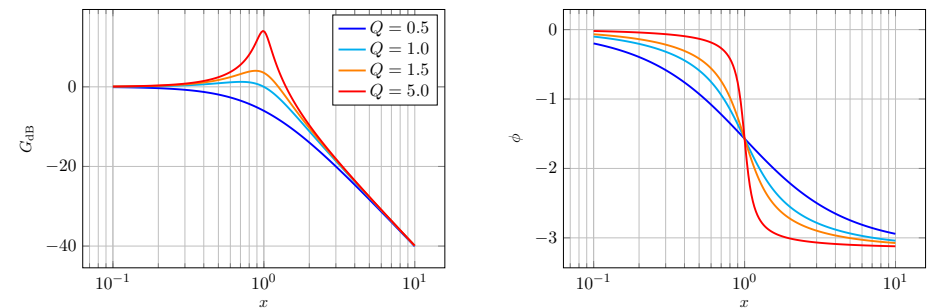
A haute fréquence : $\underline{H} \approx \frac{1}{jx}$, donc $G_{\text{dB}} \approx -20 \log x$ et $\phi \approx -\pi/2$



b) (i) Tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série.

(ii) A basse fréquence : $\underline{H} \approx H_0$, donc $G_{\text{dB}} = 20 \log|H_0|$ et $\phi = \arg \underline{H}_0 \approx 0$

A haute fréquence : $\underline{H} \approx \frac{H_0}{-x^2}$, donc $G_{\text{dB}} \approx 20 \log H_0 - 40 \log x$ et $\phi \approx \arg H_0 - \arg(-x^2) = -\pi$



iii) On étudie les variations de $|H(x)|$. Lorsque $Q \geq 1/\sqrt{2}$, il y a résonance en $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Voir chapitre sur la RSF.

iv) On a $G(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.

Il suffit alors d'insérer la valeur de $x_{\max} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ pour obtenir l'expression demandée.

Si on augmente trop le facteur de qualité, alors $G_{\max} \approx H_0 Q \gg H_0$, et on risque une surtension !

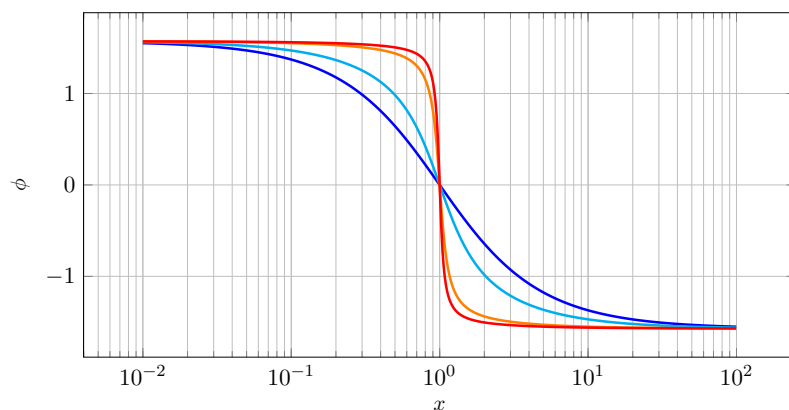
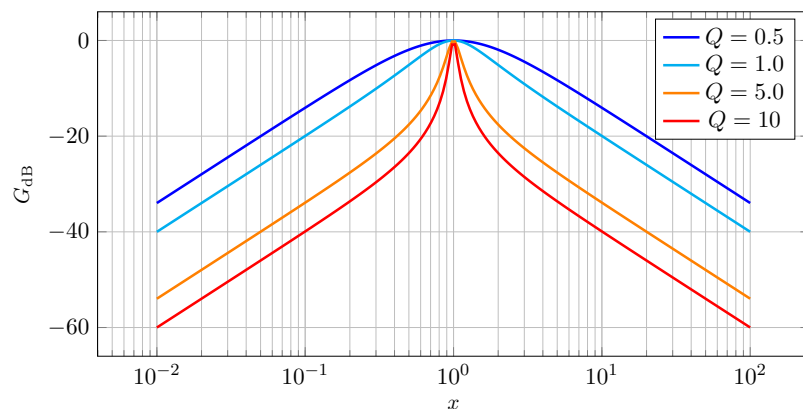
c) On a $\underline{H} = \frac{-1/2}{1 + \frac{j}{2}(x - \frac{1}{x})}$, donc $H_0 = \frac{-1}{2}$ et $Q = \frac{1}{2}$.

On peut écrire $\underline{H}(x) = \frac{jx}{Q} \times \underline{H}'(x)$, avec $\underline{H}'(x)$ étudié à la question b. Donc :

$$G_{dB} = \underbrace{20 \log \left| \frac{jx}{Q} \right|}_{\text{Pente de } +20\text{dB/décade}} + \underbrace{20 \log |H'(x)|}_{\text{Diagramme de Bode précédent}}$$

$$\phi = \arg \left(\frac{jx}{Q} \right) + \arg H' = \frac{\pi}{2} + \arg H'$$

Le logarithme transforme les produits en somme, donc on peut sommer les digrammes !

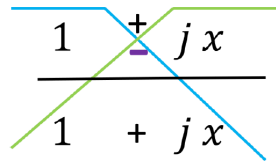


Pour nommer le comportement d'un filtre, on décrit la forme de la courbe de gain. Par exemple un filtre qui n'atténue que les hautes fréquences est dit « *filtre passe-bas* ». Au contraire, un filtre n'atténuant que les basses fréquences est un filtre « *passe-haut* ». On précise en général l'ordre du filtre.

Méthode

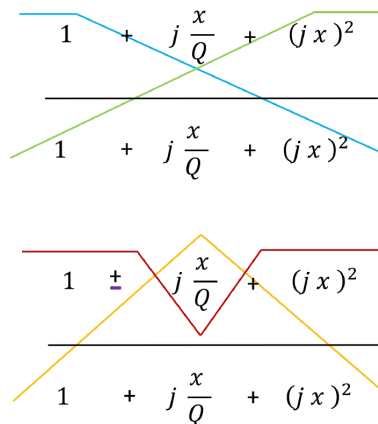
Il existe un moyen mnémotechnique simple pour se souvenir du comportement d'un filtre !

Filtres d'ordre 1 :



Bleu : passe-bas, vert : passe-haut, violet : passe-tout (déphaseur).

Filtres d'ordre 2 :



Bleu : passe-bas, vert : passe-haut, violet : passe-tout (déphaseur), jaune : passe-bande, rouge : coupe-bande.

Quel critère nous permet de dire quelles sont les pulsations associées à une atténuation significative du signal ? On définit pour cela les (ou la) **pulsation(s) de coupure** à 3dB pour lesquelles (ou laquelle) :

$$G_{\text{dB}} = G_{\text{max}} - 3\text{dB} \Leftrightarrow |H| = \frac{|H|_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

puisque $20 \log(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$. Le domaine de pulsation pour lequel $G_{\text{dB}} \geq 20 \log(|H|_{\text{max}}/\sqrt{2})$ s'appelle la **bande passante** à 3dB du système*. Le domaine complémentaire s'appelle la **bande atténuée**.

Exercice 30

Donner la/les pulsations de coupure du filtre suivant :

$$H(x) = \frac{\frac{jx}{Q}}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2}$$

L'amplitude maximale est divisée par $\sqrt{2}$ pour $x = x_c$, qui donne la condition :

$$\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

On en déduit que la bande passante est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

*. On peut se demander : pourquoi $\sqrt{2}$? Rappelons-nous que la puissance transmise est quadratique en les grandeurs électriques (u , i), ainsi on regarde le domaine de pulsation telle que cette puissance soit divisée par 2.

Remarque

Au sujet du filtre passe-bande :

- Lorsque $Q > 1$, on dit que le filtre **passe-bande** est **sélectif** (résonance aigüe)
- Lorsque $Q \leq 1$, le filtre **passe-bande** est dit **peu sélectif** (résonance floue).

Un filtre peut permettre de sélectionner certaines fréquences, mais peut également permettre d'effectuer des opérations particulières sur un signal donné (comme l'intégration ou la dérivation).

Exercice 31 ❤️

- Montrer qu'un filtre passe-bas d'ordre 1 présente un caractère intégrateur en bande atténuée ^a.
- Montrer qu'un filtre passe-haut d'ordre 1 présente un caractère dérivateur en bande atténuée.
- Préciser, pour un filtre passe-bande d'ordre 2, les conditions sur la pulsation définissant les domaines spectraux de dérivation et d'intégration.

^a. D'ailleurs, comment réaliser un vrai filtre intégrateur (et non un pseudo-intégrateur) ?

a) On a $\underline{H} = \frac{1}{1+jx}$. En bande atténuée ($x \rightarrow \infty$), on a $\underline{H} \approx \frac{\omega_0}{j\omega}$. En passant dans le domaine réel, on a donc : $s(t) = s(0) + \omega_0 \int_0^t e(t') dt'$.

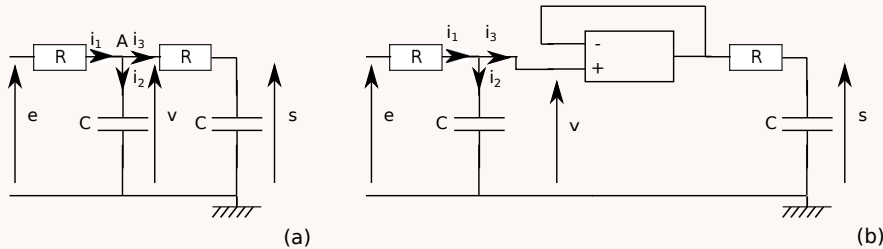
b) On a $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$. En bande atténuée ($x \rightarrow -\infty$), on a $\underline{H} \approx \frac{j\omega}{\omega_0}$. En passant dans le domaine réel, on a donc : $s(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{de}{dt}$.

c) On a $\underline{H} = \frac{jx/Q}{1+jx/Q-x^2/Q^2}$.

Pour $x^2 \gg 1$ et $x^2 \gg |x/Q|$, i.e. $\omega \gg \max\left(\frac{\omega_0}{Q}; \omega_0\right)$, on a $\underline{H} \approx \frac{\omega_0}{j\omega Q}$: comportement intégrateur. Pour $1 \gg x^2$ et $1 \gg |x/Q|$, i.e. $\omega \ll \min(\omega_0 Q; \omega_0)$, on a $\underline{H} \approx \frac{j\omega Q}{\omega_0}$: comportement dérivateur.

Exercice 32

Filtres en cascade. On se place dans tout l'exercice en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , et on étudie les montages électriques suivants :



On reconnaît, dans le montage (a), l'association de deux filtres RC en cascade.

- Est-ce que la fonction de transfert du montage a est égale au produit des fonctions de transfert ?
- Calculer $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{s}(j\omega)/\underline{v}(j\omega)$.
- Trouver une relation entre $\underline{v}$, $\underline{s}$ et $\underline{e}$.
- En déduire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{s}(j\omega)/\underline{e}(j\omega)$.
- (Bonus) Retrouver $\underline{H}(j\omega)$ par une autre méthode.

Étudions maintenant le circuit (b). On suppose l'ALI idéal, et fonctionnant en régime linéaire.

- Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}'(j\omega) = \underline{s}(j\omega)/\underline{e}(j\omega)$.
- Donner le diagramme de Bode associé. Donner également l'allure du diagramme dans le cas où les deux condensateurs ont une capacité différente.

a) Le courant i_3 étant non nul, on ne peut pas multiplier les deux fonctions de transfert !

b) Un diviseur de tension donne immédiatement : $\underline{H}_1(j\omega) = 1/(1 + jx)$ avec $x = RC\omega$.

c) La loi des noeuds en A s'écrit :

$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{e - v}{R} = jC\omega v + \frac{v - s}{R} \Rightarrow e = (2 + jx)v - s \quad (\text{VIII.1})$$

d) En combinant les deux dernières expressions, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jx - x^2} \neq \frac{1}{(1 + jx)^2} \quad (\text{VIII.2})$$

e) On peut définir une impédance équivalente formée de deux condensateurs et de la résistance de droite. Ainsi :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = jC\omega \times \frac{2 + jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Avec un pont diviseur de tension :

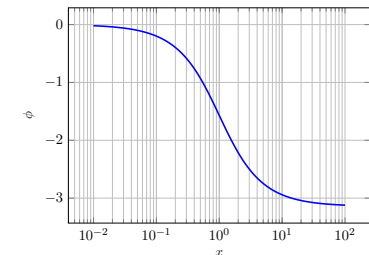
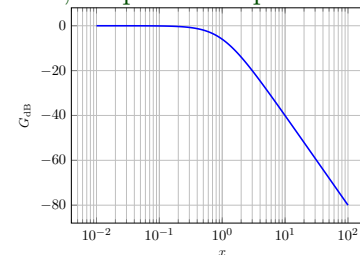
$$\frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} = \frac{1 + jx}{1 + 3jx - x^2}$$

En multipliant par $\underline{H}_1$, on retrouve le résultat précédent.

f) L'ALI étant idéal, on a $i_3 = i_+ = 0$ (impédance d'entrée infinie), et la loi des noeuds donne ici $v = \frac{1}{1+jx}e$ (on peut en fait simplement appliquer un diviseur de tension car aucun courant ne sort de la branche). Par ailleurs, $v_s = v_- = v_+ = v$, donc

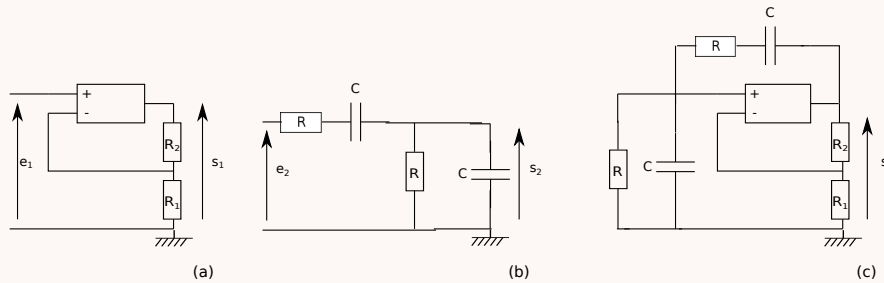
$$s = \frac{1}{1 + jx}v = \frac{1}{(1 + jx)^2}e \Rightarrow \underline{H}' = \frac{1}{(1 + jx)^2} \quad (\text{VIII.3})$$

g) Cette fonction de transfert est égale au produit des fonctions de transfert des deux filtres. Ceci est dû au fait que l'impédance d'entrée de l'ALI est infinie, et que son impédance de sortie est nulle.



Exercice 33 ⚡

Oscillateur de Wien. On considère les trois montages suivants :



Les AO sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

- Premier montage.* Calculer la fonction de transfert $\underline{A}(j\omega) = \underline{s}_1(j\omega)/\underline{e}_1(j\omega)$ du premier montage.
- Deuxième montage.* Calculer la fonction de transfert $\underline{B}(j\omega) = \underline{s}_2(j\omega)/\underline{e}_2(j\omega)$. De quel type de circuit s'agit-il ?
- Troisième montage.* Quel est le lien avec les deux montages précédents ? Donner l'équation qui régit le système bouclé. A quel condition y a-t-il établissement d'un régime sinusoïdal spontané ? ^a

a. D'ailleurs, d'où vient l'énergie nécessaire à l'entretien des oscillations ?

a) On a $V_+ = V_- = e_1$. Un pont diviseur de tension donne : $V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s_1$.
On a donc :

$$\frac{s_1}{e_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

b) Un pont diviseur de tension donne :

$$\frac{s_2}{e_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $x = RC\omega$. Il s'agit d'un filtre **passe-bande**.

c) On combine les deux montages précédents pour obtenir le montage de l'oscillateur à pont de Wien. On a alors $s = s_1 = e_2$ et $s_2 = e_1$. L'équation régissant le système bouclé est alors :

$$sB = \frac{s}{A}$$

En développant l'équation, on obtient :

$$\left[(jx)^2 + \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)(jx) + 1\right]s = 0$$

On peut repasser l'équation dans l'espace réel (variables temporelles) :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s = 0$$

On peut faire une analogie avec un système mécanique et montrer que pour $\frac{R_2}{R_1} \geq 2$, on obtient un oscillateur amplifié. Il a alors croissance des oscillations (pouvant être générées par du bruit) jusqu'à une amplitude maximale qui correspond à la saturation de l'ALI.

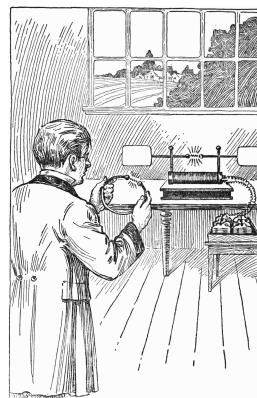
IX Transmission et traitement du signal

Comment transmettre un signal sur une certaine distance ? C'est l'objet d'étude des **télécommunications**.

Les ondes électromagnétiques sont mises en évidence par Henrik Hertz à la fin du XIX^e siècle, qui n'y voit, à ce moment là, aucune application particulière.

« *Electromagnetic waves are of no use whatsoever[...] this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right* ».

Mais ces ondes s'avèrent d'une grande utilité pour transmettre une information sur une longue distance. Comment transmettre par exemple un signal audio (20 Hz à 20 000 Hz) ?



H. Hertz dans son laboratoire

Une idée pourrait être d'envoyer une onde électromagnétique de même fréquence, mais est-ce vraiment une bonne idée ? On notera que pour émettre et recevoir de manière efficace une onde électromagnétique, une antenne doit avoir une taille de l'ordre de la longueur d'onde.

Application numérique

Quelle est l'ordre de grandeur de la taille que doit faire une antenne pour transmettre un signal de fréquence $f = 1$ kHz ?

$$\lambda \sim \frac{c}{f} \sim 300\text{km}$$

L'idée est donc de travailler sur une autre gamme de fréquence. C'est ce que permet la *modulation* du signal à transmettre.

1 - Modulation d'un signal

La **modulation** d'un signal est la technique par laquelle on transpose à plus haute fréquence les informations à communiquer.

Pour cela, on utilise une *onde porteuse*, qui s'écrit typiquement :

$$A \cos(\omega_p t + \phi)$$

Il existe ainsi trois manières de faire de la modulation, en jouant sur un des paramètres de la porteuse :

- **Modulation d'amplitude (AM)** : on module l'amplitude de la porteuse A (ex : radio AM, téléphonie 4G et 5G, TNT).
- **Modulation de fréquence (FM)** : on module la fréquence de la porteuse $\omega_p/2\pi$ (ex : radio FM, TV par satellite, téléphonie 3G).
- **Modulation de phase (PM)** : on module la phase de la porteuse ϕ (ex : Wifi, RFID, Bluetooth).

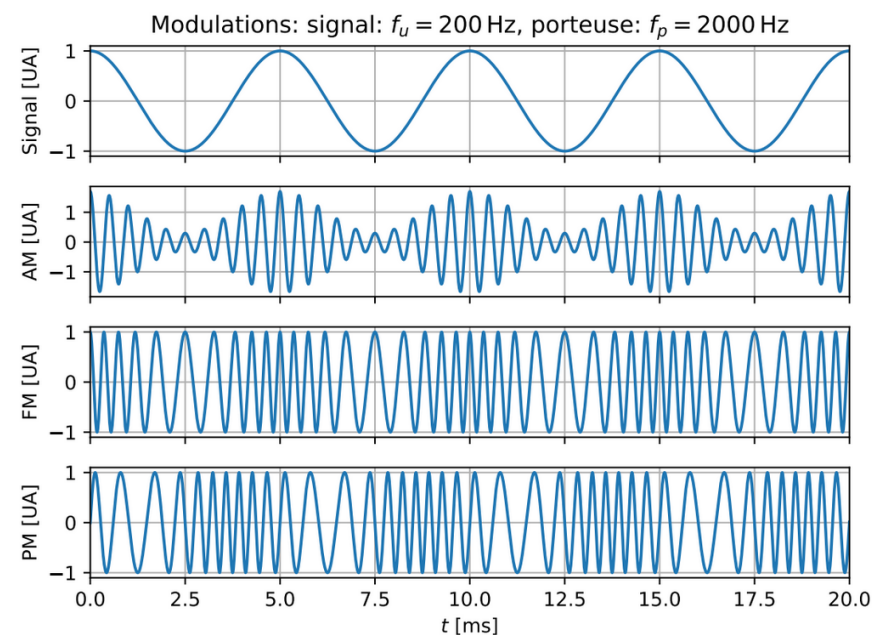


FIGURE 24 – Modulations AM, FM et PM

Ordres de grandeur

- fréquence AM : $\sim 1 \text{ MHz}$
- fréquence FM : $\sim 100 \text{ MHz}$

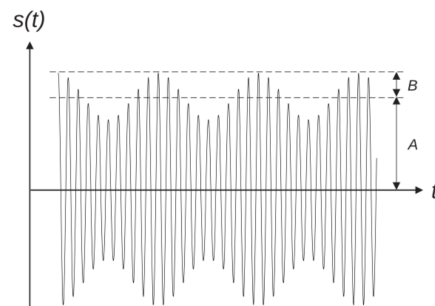
2 - Modulation d'amplitude

Soit un signal de porteuse $v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$ et un signal modulant $v_m(t) = B \cos(\omega_m t)$. Le signal $v_m(t)$ est injecté dans le multiplieur* additionné d'une tension continue A constante, avec le signal de porteuse $v_p(t)$. En sortie du multiplieur, on a alors :

$$s(t) = kA_p [A + B \cos(\omega_m t)] \times \cos(\omega_p t)$$

L'amplitude du signal varie donc entre $a = A - B$ et $b = A + B$. On est alors amené à définir le *taux de modulation* :

$$m = \frac{b - a}{b + a} = \frac{B}{A}$$



Le signal $s(t)$ peut alors s'écrire :

$$s(t) = kA_p A \left[\cos(\omega_p t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_p + \omega_m)t) + \frac{m}{2} \cos((\omega_p - \omega_m)t) \right]$$

Le spectre comprend donc les fréquences f_p , $f_p - f_m$ et $f_p + f_m$. **La modulation est une opération multiplicative, donc non linéaire.** Selon la valeur du taux de modulation, on peut parler de *modulation double bande à porteuse conservée* (DBPC) ou de *modulation double bande à porteuse supprimée* (DBPS, si $m = \infty$).

*. Le multiplieur multiplie également par une constante k caractéristique du composant. Souvent $k \approx 0.1 \text{ V}^{-1}$.

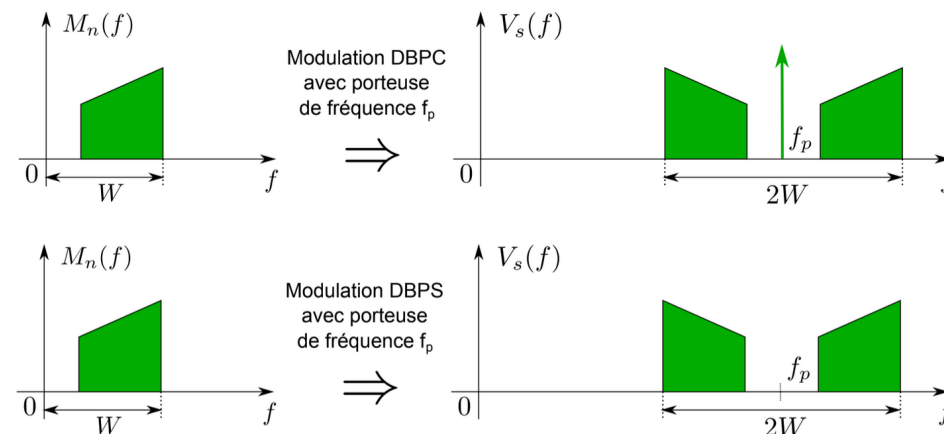


FIGURE 25 – Représentation fréquentielle de la modulation d'amplitude DBPC (haut) et DBPS (bas).

Il existe de nombreux moyens de faire de la démodulation en amplitude. Un exemple de démodulation par *détection de crête* est développé dans la composition de physique de 2015.

Exercice 34

Modulation et démodulation d'amplitude. Faire la partie III de la composition de physique de la session 2015 de l'agrégation externe de physique-chimie, option physique.

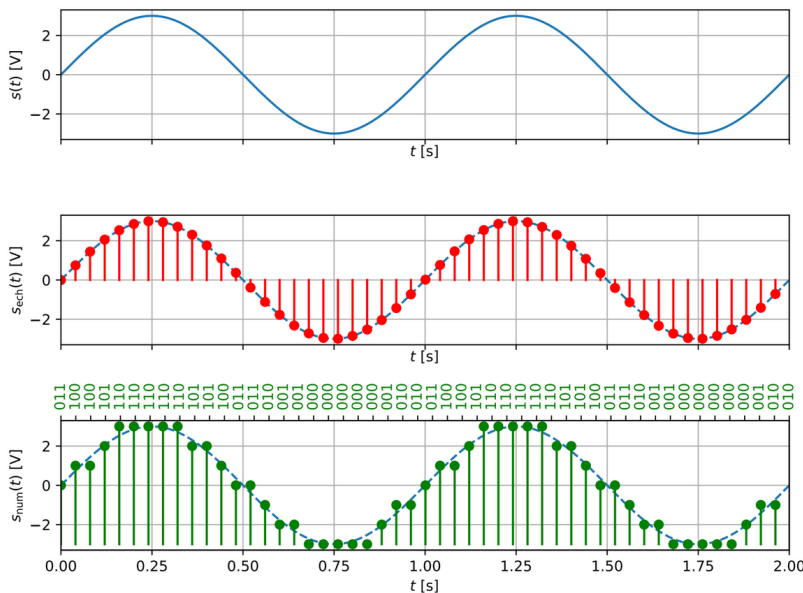
3 - Traitement numérique

La numérisation d'un signal est une technique avantageuse qui permet de **stocker** l'information et de mener simplement des opérations de **traitements** (numériques). Cela nécessite de passer d'un signal *continu*, ou *analogique*, à un signal *numérique* discret. La construction d'un signal numérique à partir d'un signal analogique se décompose en trois opérations fondamentales :

- l'**échantillonnage** du signal avec une période régulière T_e ;
- la **quantification** du signal échantillonné sur un niveau discret ;
- la **représentation** de chaque niveau par un élément binaire.

La première opération d'échantillonnage du signal consiste donc à passer d'une grandeur continue $s(t)$ à une suite discrète de valeurs $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour cela, on utilise un échantillonneur, qui prend les valeurs de $s(t)$ à intervalles de temps réguliers T_e (fréquence d'échantillonnage f_e).

Schéma de principe :



Exercice 35 ⚡

Échantillonnage, critère de Shannon et repliement de spectre.

- a) Soit $s(t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f . Quel est le spectre du signal échantillonné $s_{\text{ech}}(t)$?
- b) Comment reconstruire simplement le signal $s(t)$ à partir du signal échantillonné ? Comment choisir f_e , la fréquence d'échantillonnage, pour garantir le fonctionnement de cette méthode ?
- c) On considère maintenant un signal $s(t)$ quelconque, dont le spectre est borné. Quel est le spectre du signal échantillonné ? En déduire une condition sur f_e pour remonter facilement à $s(t)$ à partir de $s_{\text{ech}}(t)$.
- d) Que se passe-t-il pour un signal $s(t)$ à spectre non-borné ? Comment appelle-t-on ce type de phénomène ? Comment l'éviter ?

a) Le signal échantillonné $s_{\text{ech}}(t)$ est le produit du signal $s(t)$ et d'un peigne de Dirac $d(t, T_e)$ de fréquence T_e :

$$s_{\text{ech}}(t) = s(t) \times d(t, T_e) = s(t) \times \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$= \begin{cases} s(t) & \text{si } t = kT_e, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le peigne de Fourier étant périodique (de fréquence $f_e = 1/T_e$), on peut le décomposer en série de Fourier :

$$d(t, T_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n)$$

En supposant le signal $s(t)$ de la forme $s(t) = s_0 \cos(2\pi f t)$, le signal échantillonné s'écrit :

$$s_{\text{ech}}(t) = \frac{s_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n [\cos(2\pi(nf_e + f)t + \varphi_n) + \cos(2\pi(nf_e - f)t + \varphi_n)]$$

On a donc décomposé le spectre du signal échantillonné $s_{\text{ech}}(t)$ en une série d'harmonique de fréquences f et $nf_e \pm f$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) Pour reconstruire le signal, on réalise l'opération inverse : pour chaque harmonique f_i sur le spectre, on associe une fonction sinusoïdale $s_i(t)$ de fréquence f_i . L'amplitude est donnée par la taille de l'harmonique. En sommant tous les $s_i(t)$, on retrouve le signal $s(t)$.

Cependant, si $f_e - f < f$ (i.e. $f_e < 2f$), on obtient un signal de fréquence inférieure à f . Le **théorème de Nyquist-Shannon** impose alors une contrainte sur la fréquence du signal échantillonné :

$$f \leq \frac{f_e}{2}$$

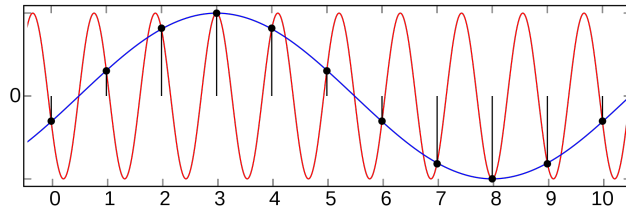


FIGURE 26 – Exemple de cas où le théorème de Shannon n'est pas respecté.

c) Pour un signal $s(t)$ à spectre bornée, le spectre du signal échantillonné est composé d'une succession du spectre de départ.

On pourra reconstruire le signal $s(t)$ si les différents morceaux du spectre ne se recouvrent pas. On retrouve le **théorème de Nyquist-Shannon** :

$$f_{\text{max}} \leq \frac{f_e}{2} \equiv f_N$$

d) Si le signal $s(t)$ est à spectre non-borné (ou si le critère de Shannon n'est pas respecté), on aura recouvrement des différentes parties du spectre. Il apparaît alors un **repliement du spectre**. Pour l'éviter, on peut utiliser un filtre antirepliement : un filtre passe-bas avant l'échantillonnage permet de borner le spectre du signal.

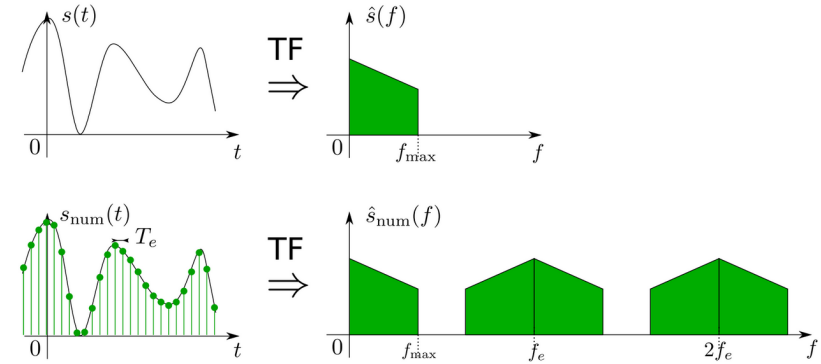


FIGURE 27 – Effet de l'échantillonnage sur le spectre de Fourier.

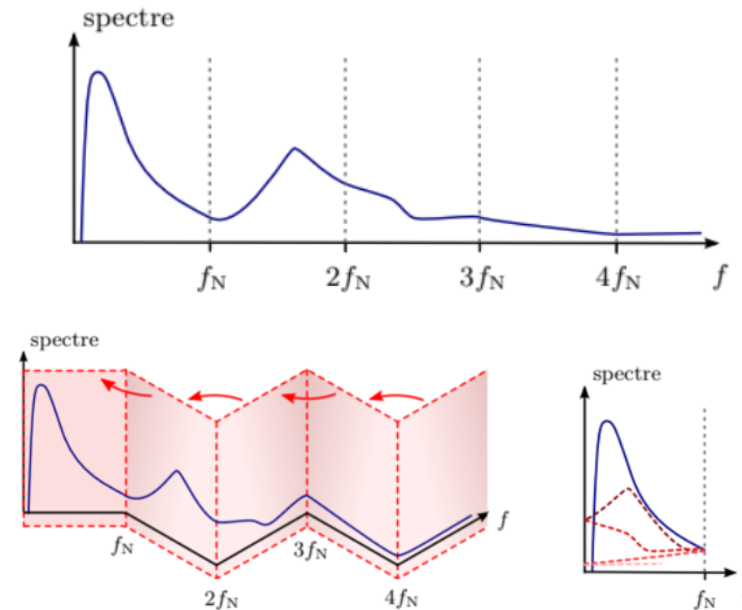
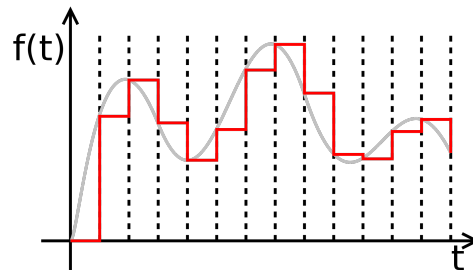


FIGURE 28 – Repliement du spectre

Remarque

En pratique, en complément de l'échantillonneur, on utilise un **bloqueur**, qui permet de mémoriser pendant T_e la valeur d'un échantillon, et ainsi avoir un signal échantillonné en marche d'escalier plutôt qu'une suite d'impulsion.



Une fois le signal échantillonné, ce n'est pas fini. En effet, le signal peut encore admettre un continuum de valeurs en ordonnée. Il faut donc **quantifier** également l'axe des ordonnées (c'est l'opération de **quantification** du signal). Ainsi, par exemple (et comme nous allons le voir dans l'exercice suivant), si le signal à échantillonner est une tension comprise entre 0 V et 5 V, et si la quantification a lieu sur 8 bits, le signal quantifié ne pourra prendre qu'un nombre discret de valeurs (plus précisément, $2^8 = 256$ valeurs possibles seulement). Cette opération est réalisée par un **convertisseur analogique-numérique (CAN)**. L'opération inverse, qui permet de passer d'un signal numérique quantifié à un signal analogique, est assurée par un **convertisseur numérique-analogique (CNA)**. Le signal analogique ainsi restitué doit alors à son tour être filtré (filtrage de restitution) afin de supprimer les hautes fréquences dues au fait que le signal est échantillonné.

Exercice 36

Convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique. Faire la partie IV de la composition de physique de la session 2015 de l'agrégation de chimie.

Un signal numérisé peut facilement être traité. On peut par exemple le **moyenner**, le **dérivé**, le **lisser**... On peut également effectuer des opérations numériques en **discrétisant une équation différentielle** appliquée au signal. Enfin, on peut avoir recours à l'analyse spectrale : on effectue la **transformée de Fourier numérique** (et discrète) du signal, et on peut modifier à dessein le spectre ainsi obtenu (supprimer des composantes, en sélectionner certaines, en amplifier, etc...).

Méthode

Pour effectuer la TF d'un signal à l'oscilloscope (par exemple) : le nombre d'échantillons N du signal est fixé. Ainsi, on choisit f_e en choisissant le calibre temporel ($f_e = 1/T_e = N/T_0$ avec $T_0 = NT_e$ la durée d'acquisition). D'autre part, c'est la **durée d'acquisition du signal** qui fixe la résolution spectrale Δf :

$$\Delta f = 1/T_0$$

Ainsi il y a parfois un compromis à trouver, car choisir f_e grand (pour respecter le critère de Shannon) contraint à choisir T_e petit et donc T_0 petit, ce qui implique une résolution spectrale moindre !

Question

Un oscilloscope propose également de choisir une **fenêtre de pondération** pour effectuer une TF. Quel en est l'intérêt ?

Le choix d'une fenêtre FFT va résulter d'un compromis entre la résolution en fréquence et la précision en amplitude. Il dépend donc en partie de ce que l'on veut mesurer et des caractéristiques du signal source. Modifier le fenêtrage va modifier la forme et l'amplitude des pics et des lobes latéraux. Le choix du fenêtrage doit être adapté au signal étudié.

