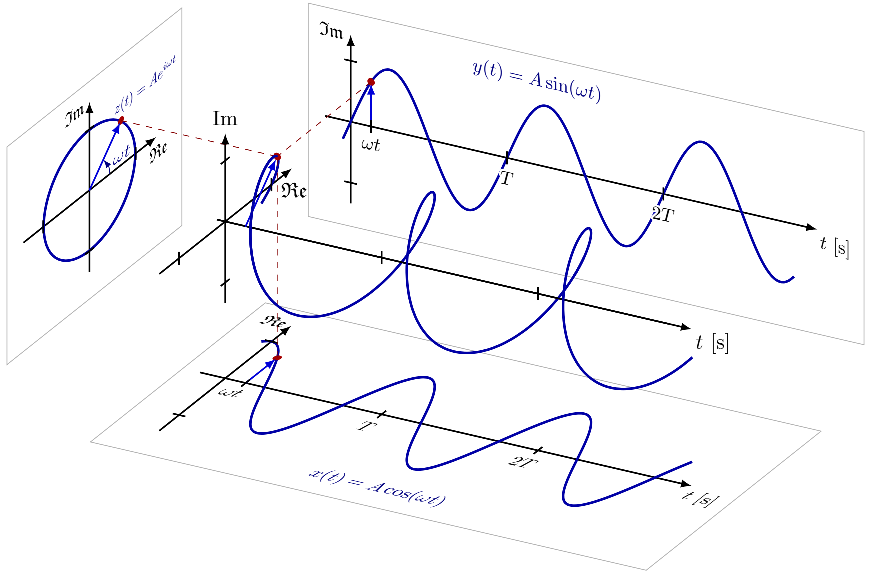
Maths pour la physique

Centre de Préparation à l'Agrégation de Montrouge

Baptiste Corrège – baptiste.correge@phys.ens.fr



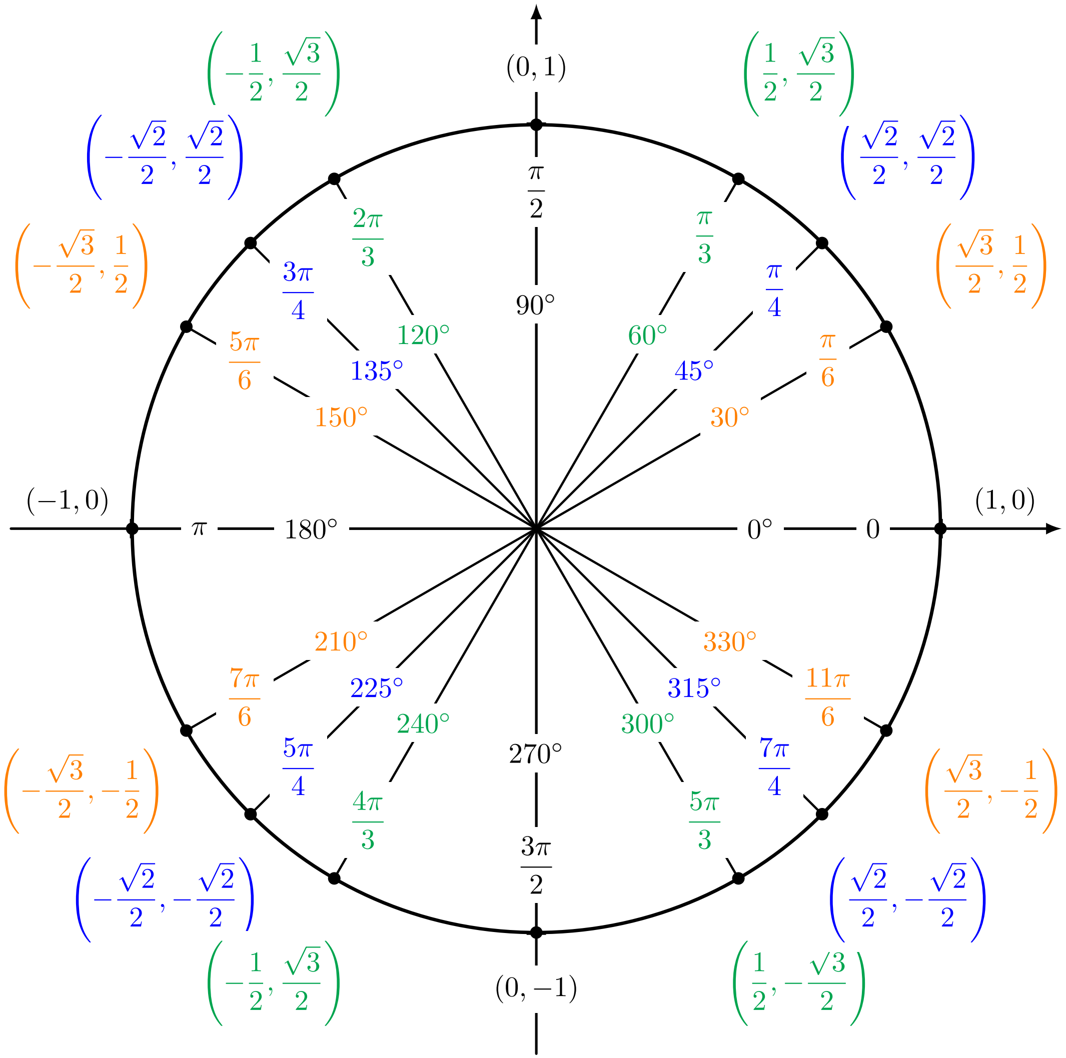
Le but de ce document est de rappeler les principales formules et propriétés mathématiques qu'il est bon de connaître et savoir utiliser afin de résoudre les problèmes rencontrés en physique. Il n'a pas pour vocation de servir de cours de mathématiques et ne peut s'y substituer. Il est plutôt présenté comme un formulaire sur lequel se reporter quand le besoin s'en fait sentir. Ce document ayant pour but de combler les lacunes en mathématiques du lecteur, celui-ci est invité à proposer toute modification qu'il pense utile.

> Il n'y a pas de réussite facile ni d'échecs définitifs.
>
> Marcel Proust

Table des matières

I Trigonométrie

1 - Le cercle trigonométrique



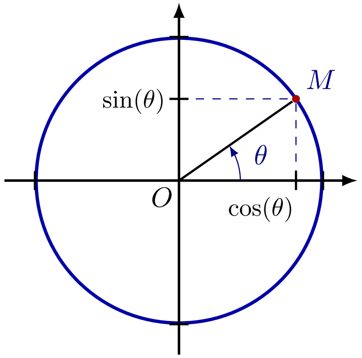
2 - Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore (−580?, −504?)

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{I.1}$$

On peut faire le lien entre le cercle trigonométrique et le plan complexe :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{I.2}$$



Ainsi on peut écrire :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(\theta) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\theta}\right) & \text{(I.3)} \\ \sin(\theta) = \mathfrak{Im}\left(e^{i\theta}\right) & \text{(I.4)} \end{cases}$$

Les calculs algébriques sur les nombres complexes sont plus simples que les calculs sur les fonctions trigonométriques. Il est donc souvent plus aisé de se ramener à un calcul avec des exponentielles complexes.

3 - Formules d'addition des angles

Addition des angles

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \text{(I.5)} \\ \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) & \text{(I.6)} \end{cases}$$

« Le cosinus est raciste et menteur ! »

Duplication des angles

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 & \text{(I.7)} \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) & \text{(I.8)} \end{cases}$$

Addition de fonctions trigonométriques

$$\forall A, B, x \in \mathbb{R}, \exists C, \phi \in \mathbb{R},\ A\cos(x) + B\sin(x) = C\cos(x+\phi) \tag{I.9}$$

où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan\phi = \frac{B}{A}$.

4 - Formules de linéarisation

Formules d'Euler (1707-1783)

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{I.10}$$

Transformation de produits en sommes

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right] & \text{(I.11)} \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] & \text{(I.12)} \\ \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right] & \text{(I.13)} \end{cases}$$

Transformation de sommes en produits

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{(I.14)} \\ \cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{(I.15)} \\ \sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{(I.16)} \\ \sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{(I.17)} \end{cases}$$

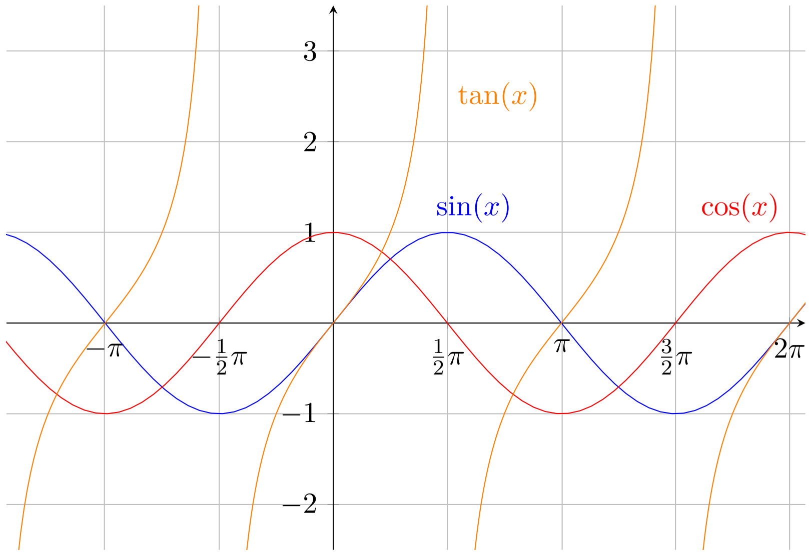
5 - Antilinéarisation

Formules de Moivre

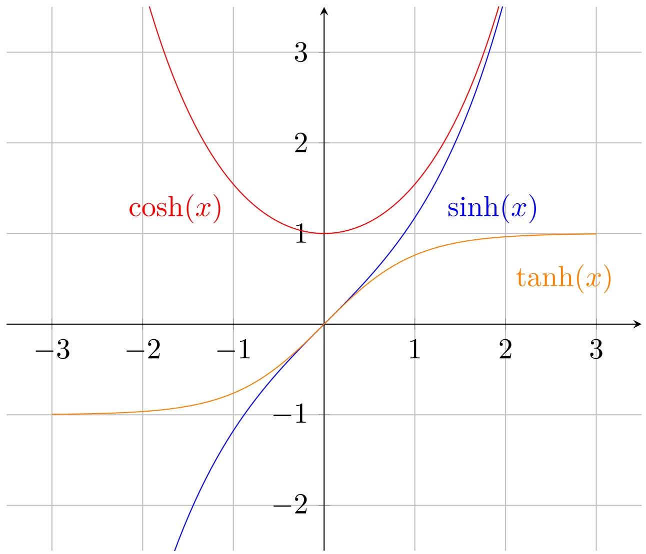
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} e^{inx} = \left(e^{ix}\right)^n & \text{(I.18)} \\ \cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n & \text{(I.19)} \end{cases}$$

6 - Tracés de fonctions

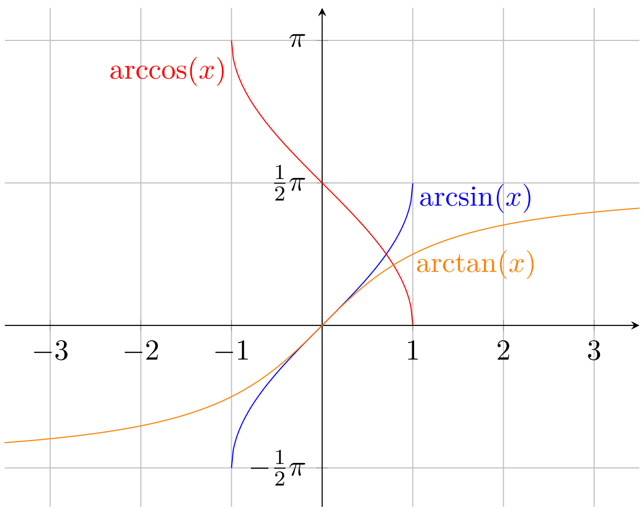
Fonctions sinusoïdales



Fonctions hyperboliques



Fonctions réciproques



II Nombres complexes

On note i le nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$.

1 - Formes complexes

Nombre complexe

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous forme algébrique $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), sous forme trigonométrique $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($R \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$), ou sous forme exponentielle/polaire $z = Re^{i\theta}$.

Formule d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{II.1}$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{II.2}$$

Module et argument Soit $z \in \mathbb{C}$. Son module est $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, et son argument est

$$\arg z = \theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \\ \frac{\pi}{2}\mathrm{sign} b & \text{si } a = 0 \end{cases} \tag{II.3}$$

Parties réelles et imaginaire

La partie imaginaire de z est $\mathfrak{Re}(z) = a = R\cos\theta$.
La partie imaginaire de z est $\mathfrak{Im}(z) = b = R\sin\theta$.

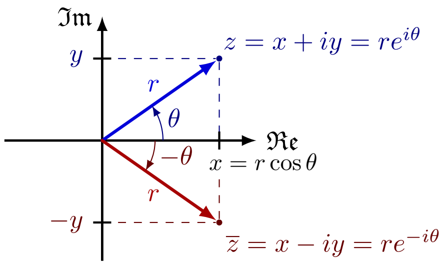
2 - Conjugaison

Complexe conjugué

On appelle conjugué de z le nombre

$$\overline{z} = a - ib = Re^{-i\theta} \tag{II.4}$$

La conjugaison est donc une opération de symétrie par rapport à l'axe réel.



Quelques propriétés

$$\begin{array}{lrl} \forall z \in \mathbb{C} & |\overline{z}| = |z| & \arg \overline{z} = -\arg z [2\pi] \quad (\text{II.5}) \\ \forall z, z' \in \mathbb{C} & \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} & \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \quad (\text{II.6}) \\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} & \quad (\text{II.7}) \\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{Z}^* & \overline{z^n} = \overline{z}^n & \arg z^n = n \arg z \quad (\text{II.8}) \\ \forall z \in \mathbb{C} & \overline{\overline{z}} = z & \quad (\text{II.9}) \\ \forall z \in \mathbb{C} & \mathfrak{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} & \mathfrak{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2} \quad (\text{II.10}) \\ \forall z \in \mathbb{C} & |z|^2 = z\overline{z} & \arg z + \arg \overline{z} = 0 \quad (\text{II.11}) \end{array}$$

3 - Fonctions sur les complexes

Exponentielle et logarithme

On peut prolonger les fonctions exp et ln sur les variables complexes de la manière suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a + ib) = \exp a \times (\cos b + i \sin b) \tag{II.12}$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ln z = \ln|z| + i \arg z \tag{II.13}$$

où $\arg z$ est défini à 2π près.

Racines n-ièmes[*]

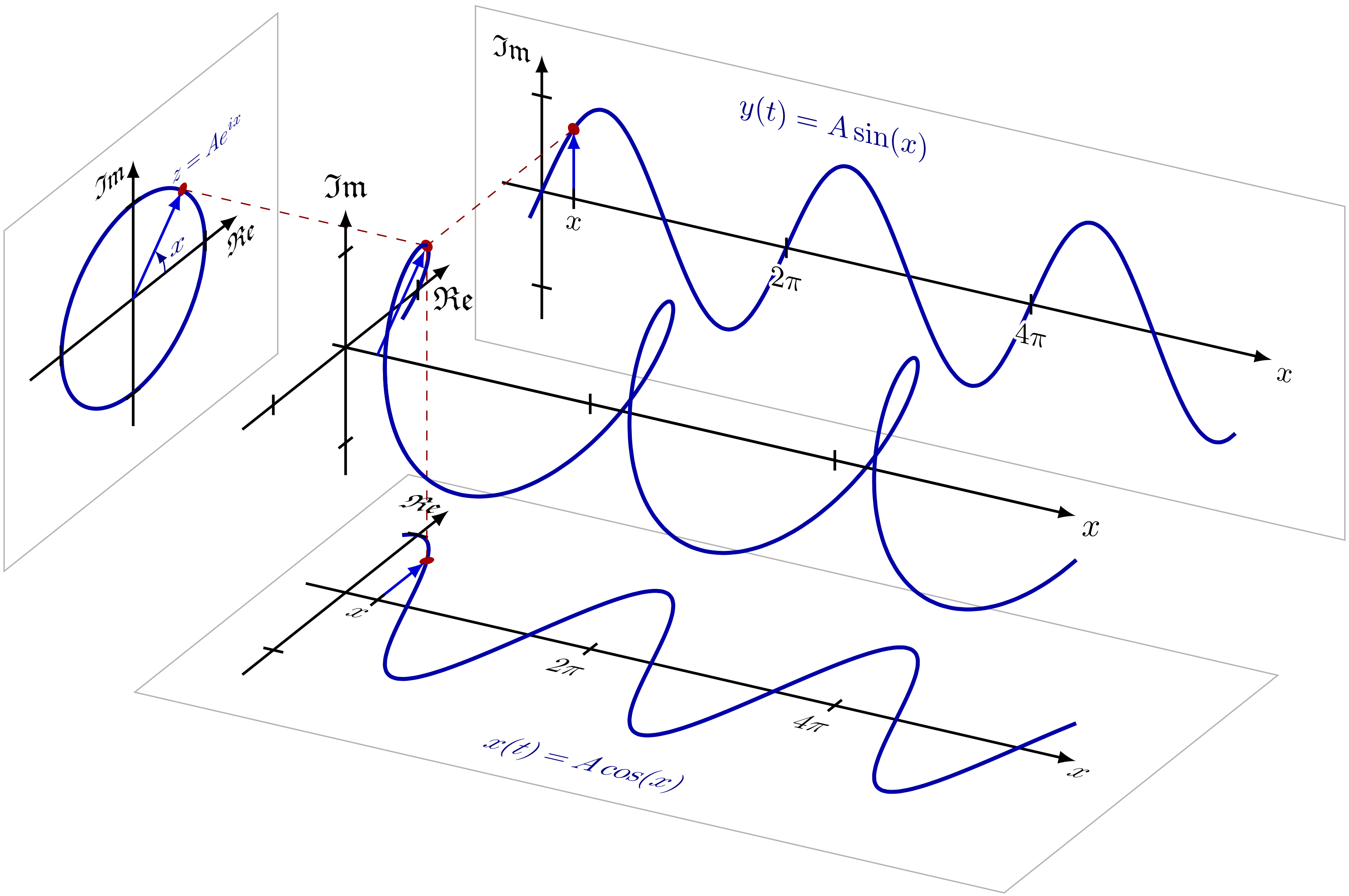
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Les racines n-ièmes de Z sont les complexes z tels que $z^n = Z$. Il existe n racines z_k et le passage par la forme polaire permet d'écrire :

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ |z_k| = |Z|^{1/n} \qquad \arg z_k = \frac{\arg Z + 2k\pi}{n} \tag{II.14}$$

On montre alors que :

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \tag{II.15}$$

*. Pour la culture, ce n'est pas à connaître par cœur.



$\mathfrak{Im}$
$z = Ae^{ix}$
x
$\mathfrak{Re}$
$\mathfrak{Im}$
$\mathfrak{Re}$
$\mathfrak{Im}$
$y(t) = A\sin(x)$
x
2π
4π
x
x
$\mathfrak{Re}$
x
2π
4π
x
$x(t) = A\cos(x)$

III Exponentielles et logarithmes

1 - Fonction exponentielle

Constante de Neper :

$$e = \exp(1) \approx 2.71828 \tag{III.1}$$

La fonction exponentielle est définie à partir de la constante de Neper :

$$\begin{array}{rcccl} \exp & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \exp(x) = e^x \end{array} \tag{III.2}$$

Propriétés :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) > 0 \tag{III.3}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \tag{III.4}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \tag{III.5}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n \tag{III.6}$$

2 - Logarithme

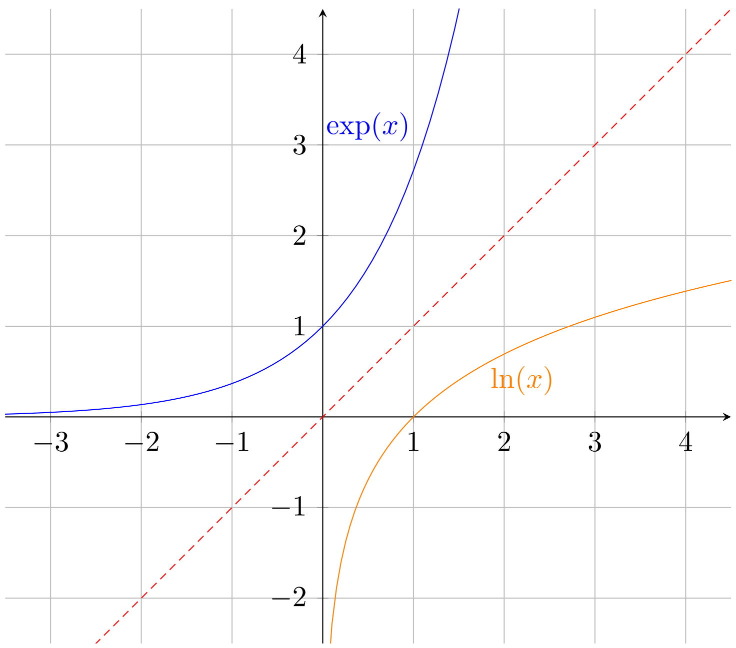
On note :

$$\begin{array}{rcccl} \ln & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \tag{III.7}$$

Les fonction exponentielle et logarithme népérien sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \ln(\exp(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad & \exp(\ln(x)) = x \end{aligned}$$

Graphiquement, cette propriété apparaît comme une symétrie par rapport à l'axe défini par $y = x$.



Propriétés :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{III.8}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \tag{III.9}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Q}, \qquad \ln(x^n) = n\ln(x) \tag{III.10}$$

3 - Fonctions puissances :

Exponentielle de base a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp_a \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a) \end{array} \tag{III.11}$$

Logarithme de base a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \tag{III.12}$$

Propriétés :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad a^{x+y} = a^x a^y \tag{III.13}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (ab)^x = a^x b^x \tag{III.14}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (a^x)^y = a^{xy} \tag{III.15}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp_a(\log_a(x)) = x \tag{III.16}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(a^x) = 1 \tag{III.17}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{III.18}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \tag{III.19}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) + \log_b(x) = \frac{\ln(x)\ln(ab)}{\ln(a)\ln(b)} \tag{III.20}$$

$$\tag{III.21}$$

IV Dérivation

1 - Fonction dérivées

Définition : Soit f une fonction et x un élément de son ensemble de définition $\mathcal{D}$. On appellera nombre dérivé en x la valeur limite de son taux d'accroissement en ce point. La fonction dérivée f' est alors définie par :

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \tag{IV.1}$$

On note $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de dérivabilité.

2 - Règles générales de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables sur le même domaine. Soit n un entier.

$$(f+g)' = f' + g' \tag{IV.2}$$

$$(f \times g)' = f'g + fg' \tag{IV.3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{IV.4}$$

$$(f^n)' = nf^{n-1}f' \tag{IV.5}$$

$$(f \circ g)' = g' \times f' \circ g \tag{IV.6}$$

3 - Dérivées usuelles

Soit $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	k	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	kx	$\mathbb{R}$	k
$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}^*$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\mathbb{R}$	a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$
$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$
$\mathbb{R}$	$\tanh(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 + \tanh^2(x)$
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1,1]$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{argsinh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$[1,+\infty]$	$\mathrm{argcosh}(x)$	$]1,+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$]-1,1[$	$\mathrm{argtanh}(x)$	$]-1,1[$	$\frac{1}{1-x^2}$

Pour les fonctions réciproques, seule la dérivée de arctan est vraiment à connaitre.

V Intégration

1 - Fonctions primitives

Définition : Une primitive d'une fonction holomorphe f est une fonction F dont la dérivée est $F' = f$. Une fonction f possède une infinité de primitives, touts définies à une constante additive près.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathrm{cste} \tag{V.1}$$

La détermination d'une primitive permet le calcul d'intégrales de fonctions continues sur un segment $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{V.2}$$

2 - Règles générales d'intégration

Soient a et b

— Linéarité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x \tag{V.3}$$

— Relation de Chasles

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \tag{V.4}$$

— Intégration par parties

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{V.5}$$

— Changement de variable (si f et ϕ' sont continues)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f(x)\mathrm{d}x \tag{V.6}$$

3 - Quelques intégrales célèbres

Si ces intégrales sont nécessaires, elles seront rappelées dans l'énoncé.

— Intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{V.7}$$

— Intégrales de Fresnel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{V.8}$$

— Intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{V.9}$$

4 - Primitives usuelles

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int \mathrm{d}x = x + C \tag{V.10}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \neq 1 \qquad \int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{V.11}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \tag{V.12}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + C \tag{V.13}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C \tag{V.14}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int \exp(x)\mathrm{d}x = \exp(x) + C \tag{V.15}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C \tag{V.16}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C \tag{V.17}$$

VI Développements limités

1 - Développements limités

Définition : Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n (noté DL_n) en x_0 s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n \quad \text{(VI.1)}$$

2 - Formule de Taylor-Young

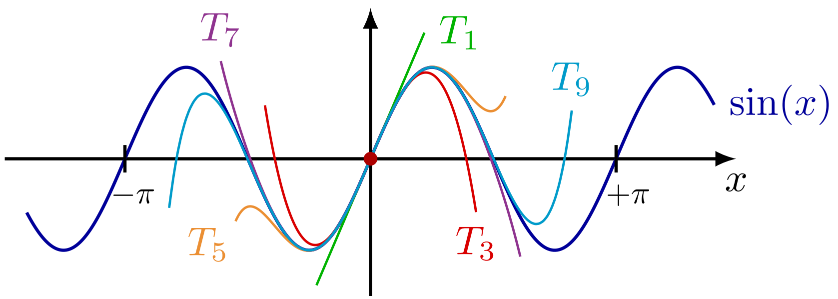
Théorème de Taylor-Young : Une fonction f dérivable n fois au point x_0 admet un développement limité d'ordre n en ce point.

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n \quad \text{(VI.2)}$$

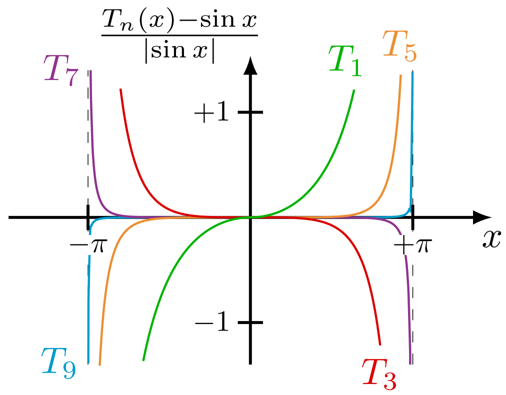
Exemple : Pour la fonction sin en 0, on obtient :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9) \quad \text{(VI.3)}$$

On note T_n le terme d'ordre n du DL$_n$.



Plus n est grand, plus le développement limité reproduit fidèlement le comportement de la fonction développée.



3 - Développements limités usuels

Les fonctions suivantes possèdent des DL$_n$ en 0 pour tout entier n.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad \text{(VI.4)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \text{(VI.5)}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{(VI.6)}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(VI.7)}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{(VI.8)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{(VI.9)}$$

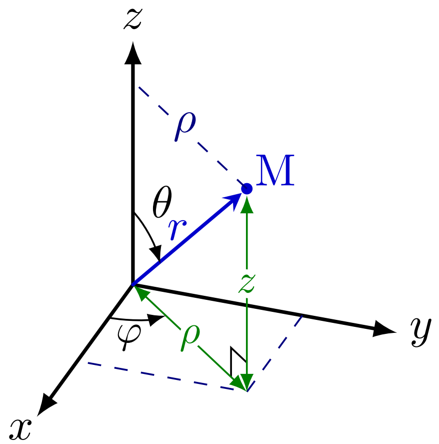
En physique, on utilise rarement plus de deux termes dans un développement limité.

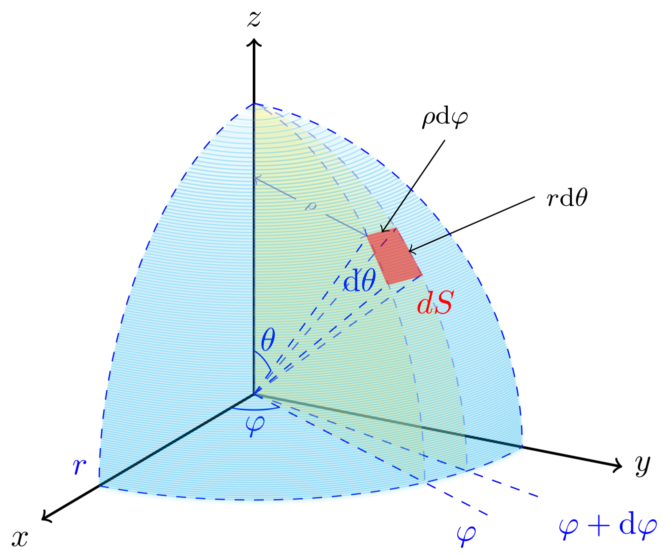
VII Repères et bases

1 - Systèmes de coordonnées

On utilise majoritairement les trois systèmes de coordonnées suivants :

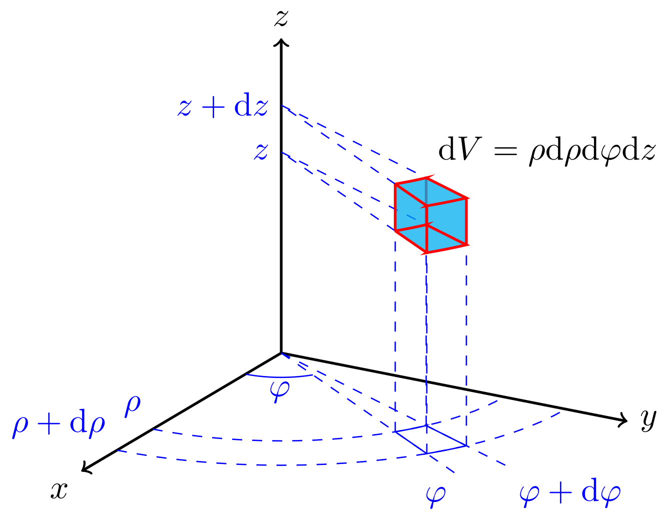
- coordonnées cartésiennes : (x, y, z)
- coordonnées cylindriques* : (ρ, θ, z)
- coordonnées sphériques : (r, θ, φ)





2 - Éléments de surface et volume

	Surface	Volume
Cartésien	$\mathrm{d}^2S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ...	$\mathrm{d}^3V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
Cylindrique	$\mathrm{d}^2S = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}^2V = \mathrm{d}^2S \times \mathrm{d}\rho = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$
Sphérique	$\mathrm{d}^2S = r\mathrm{d}\theta \times \rho\mathrm{d}\phi = r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$	$\mathrm{d}^3V = \mathrm{d}^2S \times \mathrm{d}r = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$



*. En 2 dimensions, on parle de coordonnées polaires (ρ, θ)

VIII Analyse de Fourier

1 - Transformation de Fourier

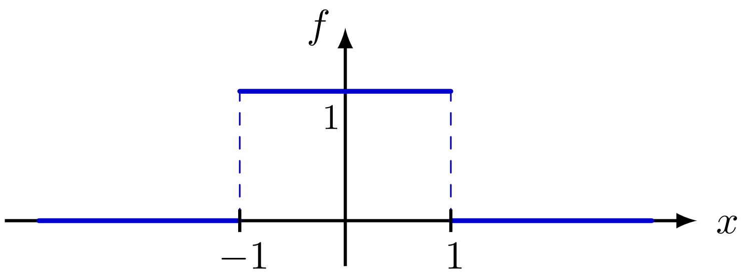
Définition : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une opération qui transforme une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ en une autre fonction $\hat{f}$, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière.

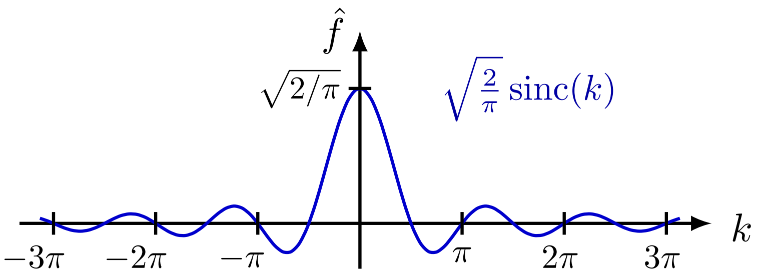
$$\mathcal{F}(f) : k \mapsto \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{VIII.1}$$

Transformation inverse : On définit également une transformation inverse $\mathcal{F}^{-1}$ qui, appliquée à $\hat{f}$, permet de retrouver f.

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{+ikx} \mathrm{d}k \tag{VIII.2}$$

Exemple : la transformée de Fourier d'une fonction porte est un sinus cardinal.





Propriétés de la transformée de Fourier : [*]

	Fonction	Transformée de Fourier
Linéarité	$af(x) + bg(x)$	$a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$
Contraction	$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$
Translation	$f(x + x_0)$	$\hat{f}(k)e^{ikx_0}$
Modulation	$f(x)e^{ixk_0}$	$\hat{f}(x + x_0)$
Convolution	$(f * g)(x)$	$\hat{f}(k)\hat{g}(k)$
Produit	$f(x)g(x)$	$(\hat{f} * \hat{g})(k)$
Dérivation	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$ik\hat{f}(k)$
	$xf(x)$	$i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}k}(k)$

2 - Séries de Fourier

Définition : Une fonction $s(t)$ périodique de période $T = 2\pi/\omega$, à valeurs réelles et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan(\phi_n) = b_n/a_n$. Les coefficients a_n et b_n sont appelés *coefficients de Fourier*. L'ensemble des coefficients c_n est appelé *spectre* (discret) de $s(t)$ pour les fréquences $f_n = 2\pi n\omega$.

Quelques propriétés :

- **Égalité de Parseval** : la valeur efficace de $s^2(t)$ vérifie :

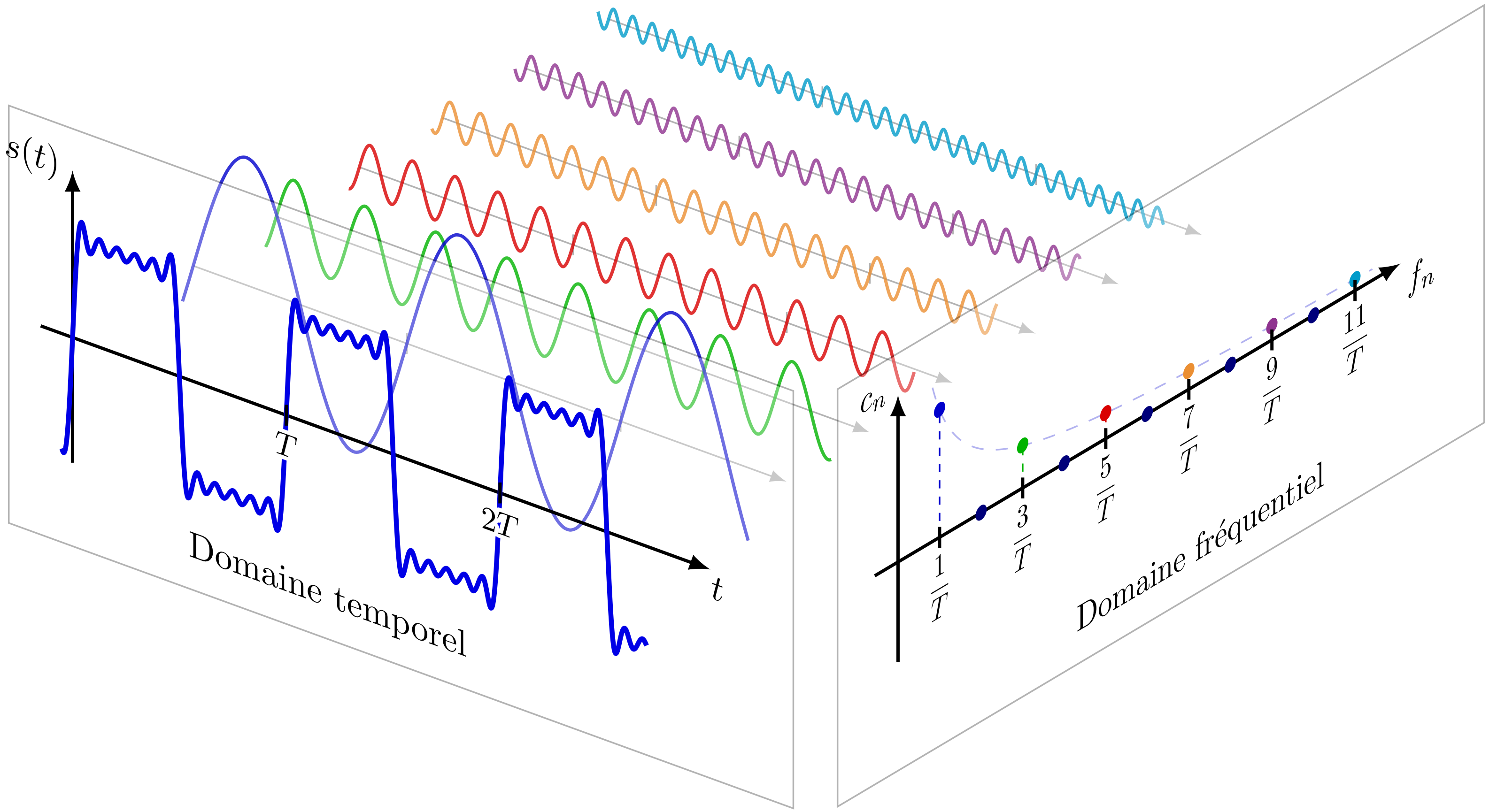
$$\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

- Si $s(t)$ est **paire** : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$
- Si $s(t)$ est **impaire** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$

Une fonction $f(t)$ *a priori* quelconque (c'est-à-dire potentiellement apériodique) peut également être décomposée, mais la décomposition de Fourier fait intervenir une somme *continue* d'harmoniques. Le spectre n'est alors plus discret mais continu.

*. Il est utile de connaître au moins les deux premières.

Exemple : Un signal carreau est impair, de période T. On montre que les harmoniques varient en $1/n$.



IX Équations différentielles

On distingue deux grandes classes d'équations différentielles :

- Les équations différentielles ordinaires (EDO), lorsque la fonction inconnue ne dépend que d'un seul paramètre ;
- Les équations aux dérivées partielles (EDP), lorsque la fonction inconnue dépend de plusieurs paramètres.

L'ordre d'une EDO ou d'une EDP est l'ordre le plus élevé des dérivées intervenant dans l'équation.

1 - Équations différentielles ordinaires linéaires

1.1 EDOL d'ordre 1

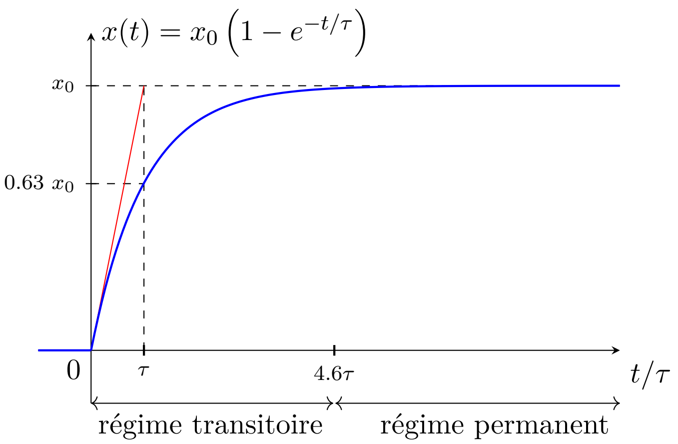
La forme canonique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_0}{\tau} \tag{IX.1}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-t/\tau} + x_0 \tag{IX.2}$$

Exemple : Si on prend comme condition initiale $x(0) = 0$, alors on observe deux régimes différents.



1.2 EDOL d'ordre 2

La forme canonique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = F(t) \tag{IX.3}$$

Solution homogène : La recherche de solutions de la forme e^{rt} nous conduit à une équation, dite *équation caractéristique*, sur r : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. La forme des solutions dépend alors du signe du discriminant.

- $Q < \frac{1}{2}$: **régime apériodique**

$$q(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\left[A\cosh\left(\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}t\right) + B\sinh\left(\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}t\right)\right] \tag{IX.4}$$

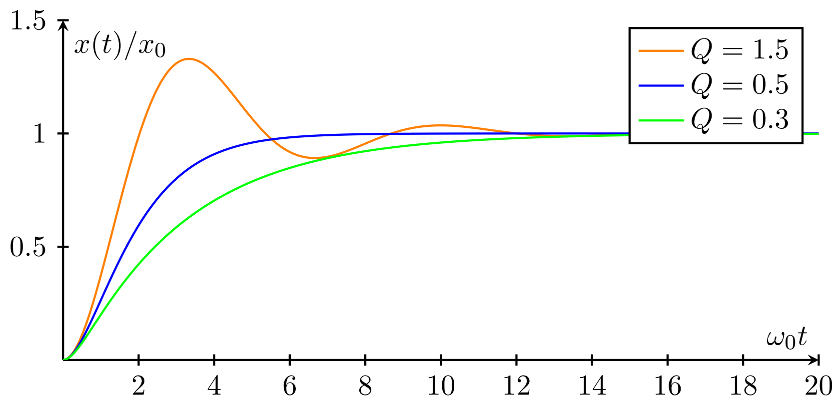
- $Q > \frac{1}{2}$: **régime pseudo-périodique**

$$q(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right)\right] \tag{IX.5}$$

- $Q = 1/2$: **régime critique**

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \tag{IX.6}$$

Exemple : $F(t) = \omega_0^2 x_0$ avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.



Baptiste Corrège baptiste.correge@phys.ens.fr

1.3 Stabilité des EDOL

Pour des EDOL d'ordre 1 ou 2, le système décrit est stable si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.*

- Pour une EDOL1 : $\tau > 0$
- Pour une EDOL2 : $\omega_0^3/Q > 0$

2 - Équations aux dérivées partielles

2.1 Quelques exemples en physique

Soit $u(x,t)$ une fonction de deux variables.

Équation de transport	$\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
Équation de Burgers	$\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
Équation des ondes	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
Équation de diffusion	$\dfrac{\partial u}{\partial t} + D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

2.2 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables permet de résoudre certaines équations différentielles linéaires ou non-linéaires du 1er ordre, et peut être adaptée pour des EDP d'ordre 2 ou plus.

Pour une équation du premier ordre, elle peut être résolue par cette méthode si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(x)g(u) \tag{IX.7}$$

La solution est alors obtenue en "séparant les variables" puis en intégrant :

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{g(u)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \tag{IX.8}$$

*. Voir le critère de Routh pour les systèmes d'ordre supérieur.

Pour les EDP, on décompose la fonction de plusieurs variables $u(x,t)$ comme produit de fonctions d'une seule variable : $u(x,t) = X(x)T(t)$. On injecte alors cette décomposition dans l'équation différentielle et on obtient plusieurs EDO.

Exemple : Cinétique chimique

Ordre	Equation		Solution
0	$-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = k$	$\Longrightarrow$	$u = u_0 - kt$
1	$-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ku$	$\Longrightarrow$	$u = u_0 e^{-kt}$
2	$-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ku^2$	$\Longrightarrow$	$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{u_0} + kt$

Attention, ici l'ordre correspond à la puissance du terme u dans le membre de droite.